Page 128

ANWENDUNGEN

DER

GRAPHISCHEN STATIK.

NACH

PROFESSOR DR. C. CULMANN

BEARBEITET

VON

W. RITTER,

PROFESSOR AM EIDGENÖSSISCHEN POLYTECHNIKUM ZU ZÜRICH.

Erster Teil.

Die im Inneren eines Balkens wirkenden Kräfte.

Mit 65 Textfiguren und 6 Tafeln.

ZÜRICH

VERLAG VON **MEYER & ZELLER**

(Reimmann'sche Buchhandlung).

1888.

Druck von David Bürkli in Zürich.

Vorwort.

„Den zweiten Band hoffe ich im Laufe der zwei nächsten Jahre vollenden zu können." Mit diesen Worten schloss Professor Culmann im April 1875 die Vorrede, mit welcher er die zweite Auflage des ersten Bandes seiner „Graphischen Statik" begleitete. Leider hat sich diese Hoffnung nicht erfüllt, und noch einige weitere Jahre gingen vorüber, ohne dass der von vielen Seiten lebhaft herbeigesehnte zweite Band des grossen Werkes erschien. Wer die Arbeitsweise Culmanns kannte, wer es beobachtet hatte, wie der Stoff unter seinen schöpferischen Händen immer neue Gestalten und grösseren Umfang gewann, und wie er oft den scheinbar einfachsten Aufgaben neue, originelle Seiten abgewinnen konnte, der begriff auch, dass die Bewältigung der gestellten Aufgabe eine längere Spanne Zeit in Anspruch nehmen musste. Dazu kam, dass Culmann neben seinen nicht unbedeutenden Berufspflichten als Professor der Ingenieurwissenschaften am Zürcher Polytechnikum noch vielfach mit Commissionsarbeiten und technischen Gutachten belastet wurde und in seinen letzten Lebensjahren sich nur selten mehr ungestört dem Werke hingeben konnte, das seinen Namen weit über die Grenzen des deutschen Sprachgebietes hinaus bekannt gemacht hat.

Wohl barg Culmanns Nachlass verschiedene Anläufe zur Bearbeitung des zweiten Bandes, manchen wertvollen neuen Gedanken und zahlreiche zerstreute Skizzen; aber das Alles machte doch nur einen kleinen Teil dessen aus, was nach der Ausdehnung, welche die graphische Statik unterdessen erlangt hatte, von dem zweiten Bande erwartet werden musste. Namentlich fehlte zu manchen Aufzeichnungen das vermittelnde Band und zu mancher Zeichnung der erläuternde Commentar,

und selbst Denjenigen, welche mit Culmann in persönlichem Verkehr gestanden hatten, war es unbekannt geblieben, nach welchem Plane er den zweiten Band, besonders die wichtigen Abschnitte über den continuirlichen Balken und den Bogen zu behandeln gedachte. So sah sich der Bearbeiter grossenteils auf eigene Füsse gestellt und muss befürchten, dass der Leser vielfach den originellen Stempel vermissen wird, welchen der Schöpfer der graphischen Statik seinen Werken aufzudrücken pflegte.

Wurde durch solche Umstände dem Unterzeichneten die Neubearbeitung des zweiten Bandes nicht wenig erschwert, so stellten sich der Fortführung des Werkes überdies noch geschäftliche Bedenken entgegen. Der Verlagshandlung erschien es nämlich unthunlich, diese Bearbeitung als eine Ergänzung des vor mehr als zwölf Jahren veröffentlichten ersten Bandes erscheinen zu lassen. Sie zog es daher vor, die zweite Hälfte des Werkes nach so langer Unterbrechung in unabhängiger Form herauszugeben. Nach verschiedenen Beratungen und Auseinandersetzungen wurde schliesslich zwischen der Verlagshandlung und dem Unterzeichneten der Vertrag dahin abgeschlossen, dass der zweite Band als selbständiges Werk unter dem Titel „Anwendungen der graphischen Statik“ erscheinen und ausserdem in fünf zeitlich getrennte Teile zerfallen sollte, von welchen jeder für sich ein abgerundetes Ganzes bildet. Der Einteilung entsprechend, welche schon Culmann eingehalten hatte, und welche noch heute mit den Bedürfnissen und Anforderungen der Bautechnik vollkommen im Einklange steht, tragen diese fünf Teile die folgenden Ueberschriften:

I. Die im Inneren eines Balkens wirkenden Kräfte.
II. Das Fachwerk.
III. Der Erddruck und die Stützmauern.
IV. Der continuirliche Balken.
V. Der Bogen.

War hierdurch die Anordnung und Einteilung des Stoffes der Hauptsache nach gegeben, so drängte sich dem Bearbeiter im Ferneren die Frage auf, in wie weit im Einzelnen das Erbe Culmanns beibehalten werden sollte. Offenbar hatte Culmann

die Absicht, sich in der zweiten Auflage des zweiten Bandes möglichst eng an die erste Ausgabe anzuschliessen und ganze Nummern unverändert mit hinüberzunehmen. Ein Gefühl der Pietät hätte den Bearbeiter auf den nämlichen Weg leiten können; die Einheitlichkeit der Behandlung dagegen wäre dadurch beeinträchtigt worden; und namentlich liess der Blick auf die Fortentwicklung, welche die graphischen Methoden durch Culmann und Andere seit der ersten Ausgabe erfahren haben, eine freiere und selbständigere Bearbeitung ratsamer erscheinen; haben doch die Bestimmung der elastischen Formänderungen und im Anschluss daran die Behandlungsweise des continuirlichen Balkens und des Bogens eine derartige Umgestaltung erfahren, dass die früheren Berechnungsarten fast gänzlich als veraltet bezeichnet werden müssen.

Dabei hat auch die von Culmann gewählte Bezeichnung mathematisch-technischer Grössen zum Teil der von deutschen Technikern vereinbarten weichen müssen. Soweit es sich hierbei nur um den Ersatz gewisser Buchstaben durch andere aus demselben Alphabete handelte, geschah der Uebergang ohne Bedenken; ungerne dagegen wurde die von Culmann eingeführte strenge Scheidung verschiedener Alphabete preisgegeben, besonders da nach der Ansicht des Unterzeichneten dieses, von der Mehrheit beschlossene Fallenlassen einer schönen Regel bei einigem guten Willen hätte vermieden werden können. Indessen schien es nicht ratsam, in einer so untergeordneten Sache bloss einem Grundsatze zu lieb den Conservativen zu spielen.

Bekanntlich hat Culmann, als er den ersten Band seines Werkes zum zweiten Male bearbeitete, den geometrischen Ableitungen der statischen Beziehungen auch rechnerische, auf den Methoden der neueren analytischen Geometrie beruhende Entwicklungen beigefügt; und es ist wohl nicht daran zu zweifeln, dass er die Absicht hegte, auch im zweiten Bande neben den graphischen Lösungen der baustatischen Aufgaben die rechnerisch-analytischen nebenher laufen zu lassen. So interessant und wissenschaftlich schön indessen dieser Parallelismus sein mag, so hatte der Unterzeichnete doch von jeher den Eindruck, dass

sich die Verfolgung dieses Zweckes nicht für ein Werk eigne, welches die Ueberschrift „graphische“ Statik trägt. Es ist daher in der vorliegenden Bearbeitung des zweiten Bandes von der Durchführung dieses Gedankens, die überdies die Kräfte eines Einzelnen leicht überstiegen hätte, Abstand genommen worden.

Diese und andere Aenderungen, welche man bei einem Vergleich mit früheren Ausgaben des Werkes erkennen wird, möge man dem Bearbeiter zu gute halten. Sie betreffen die Aussenseite des Baues. An dem inneren Wesen und an dem Fundamente, welches Culmann seiner Schöpfung verliehen hat, ist festgehalten worden. Es konnte dies um so eher geschehen, als trotz der vielen Hände, welche sich an dem weiteren Ausbau der graphischen Statik beteiligt haben, die grundlegenden Ideen und Methoden Culmanns noch immer grösstenteils unübertroffen dastehen.

So ist in der Neubearbeitung an dem Grundgedanken des Seilpolygons und seines Gefährten, des Kräftepolygons, dem eigentlichen Handwerkszeug des zeichnenden Statikers, auch da festgehalten worden, wo der Begriff der Kraft vollständig fehlt und die Construction zum blossen Multiplicationspolygon herabsinkt. Denn mag auch der Eingeweihte das Entbehrliche der untergeschobenen Auffassung für die betreffenden Fälle einsehen und die oft feinen Unterschiede zwischen graphischer Statik und graphischem Rechnen erkennen, so ist es doch für den Anfänger, für den Schüler vorteilhafter, die Eigenschaften dieser Constructionen zuerst an dem eigentlichen Kräfte- und Seilpolygone gründlich kennen zu lernen, um sie später einfach auf jene, den Kraftbegriff entbehrenden Liniengebilde übertragen zu können.

Auch die Trägheitsellipse als die Darstellerin der Trägheits- und Centrifugalmomente ebener Punktsysteme ist, nicht nur in der Festigkeitslehre, sondern namentlich auch in ihrer Anwendung auf die Untersuchung und Bestimmung elastischer Formänderungen beibehalten worden. Welche weitgehenden Dienste sie gerade auf letzterem Gebiete als Elasticitätsellipse leistet, wird Jedem einleuchten, der die betreffenden Abschnitte ohne

Voreingenommenheit durchliest. Keine andere Kurve stellt die Momente zweiter Ordnung für beliebige Axen der Ebene in so einfacher Weise dar; keine andere lässt sich in so schlichter, ungezwungener Art aus dem Grundbegriff des Centrifugalmomentes herleiten*), und diese so fruchtbare Kurve durch andere geometrische Figuren, beispielsweise durch zwei Kreise ersetzen zu wollen, muss, wenigstens vom Standpunkt der graphischen Statik aus, als ein verfehltes Bestreben bezeichnet werden.

Seit einiger Zeit wird von manchen Seiten aus das Gesetz der virtuellen Verschiebungen als Grundlage und Ausgangspunkt der ganzen Statik samt den elastischen Formänderungen betrachtet und verwertet, und die Frage lag nahe, in wie weit dieser Weg im vorliegenden Werke betreten werden sollte. Es hat etwas Bestechendes und Verlockendes, das grosse weite Reich der baustatischen Aufgaben auf einem einzelnen Grundgedanken aufzubauen, und es lässt sich nicht verkennen, dass manche Fragen aus dem Gebiete der statisch unbestimmten Constructionen sich mit Hülfe dieses Gesetzes in überraschend einfacher Weise in Angriff nehmen lassen. Im Grunde genommen werden indessen hierbei nur neue Angriffspunkte zur Bewältigung dieser Aufgaben gewonnen, während die Durchführung derselben, die Lösung im engeren Sinne nach wie vor den nämlichen Schwierigkeiten, denselben rechnerischen oder zeichnerischen Arbeiten unterworfen bleibt. Es kann auch kaum anders sein; denn bei Lichte besehen heften sich die verschiedenen Wege doch alle an den gleichen Punkten, das heisst an einigen Grundbegriffen der Mathematik und der Mechanik an und müssen sich daher, da sie auch die nämlichen Ziele verfolgen, früher oder später wieder vereinigen.

Wo es passend schien und zur Vereinfachung des Gedankenganges diente, ist das obgenannte Gesetz auch im vorliegenden Werke zu Rate gezogen worden; in der Regel sind dagegen die früheren Anschauungen und Auffassungsweisen, die überdies der graphischen Behandlung meist besser entsprechen, beibehalten worden. Uebrigens will es mir scheinen, dass man auch in der

*) Vgl. hierüber die Schweiz. Bauzeitung vom 12. Mai 1888.

rechnenden Statik mit der Verwendung des genannten Principes bisweilen zu weit geht; dasselbe durchgehend zum Ausgangspunkte aller und jeder statischen Entwicklung zu nehmen, mag zwar consequent sein, ist aber gewiss ebenso einseitig, als wenn ein leidenschaftlicher Graphostatiker bei jeder, auch der einfachsten Balkenberechnung zu Zirkel und Lineal greift.

Aehnliches liesse sich von der Verwendung kinematischer Begriffe und Anschauungen, sowie von der Einführung der Einflusslinien in die graphische Statik sagen. Man schmälert die Bedeutung dieser in neuerer Zeit beliebt gewordenen Hülfsmittel keineswegs, wenn man sie, anstatt sie an die Spitze zu stellen, nur da, wo sie gerade handlich sind, zu Rate zieht, selbst wenn ihre Vorteile hierbei auf Kosten der Allgemeinheit erkauft werden müssen.

Es ist wohl überflüssig zu bemerken, dass im vorliegenden Werke von den Methoden und Lehrsätzen der Geometrie der Lage in ausgiebigem Masse Gebrauch gemacht wird, unbekümmert darum, dass diesem Zweige der reinen Mathematik von manchen Seiten eine deutliche Abneigung entgegengetragen wird, und dass derselbe an den meisten technischen Lehranstalten (von Universitäten nicht zu reden) noch immer das Stiefkind bildet, das der Analysis gegenüber zurücktreten muss. Erweist sich das Studium der projectivischen Geometrie (wie dasjenige der darstellenden Geometrie) für den Techniker, der in seinem Leben fortwährend mit mathematischen Gebilden und Formen zu thun hat, schon an und für sich als eine nützliche Schulung des Geistes, — für die graphische Statik bildet die Geometrie der Lage erst recht die naturgemässeste Vorstufe und Hülfswissenschaft; und wenn man es erfahren hat, wie Einem bei der geometrisch-zeichnerischen Behandlung der Statik fast auf Schritt und Tritt projectivische und involutorische Reihen und Büschel entgegentreten, so begreift man es schwer, dass es noch immer Lehrbücher über graphische Statik gibt, welche diese Begriffe entbehrlich zu machen versuchen. Wohl ist es wahr, dass die Analysis zur Zeit überall als Ersatz für die reine Geometrie eintreten kann, sowie auch, dass andrerseits die graphische Statik

sich mancherorts der Rechnung nicht ganz entschlagen kann. Deshalb aber die wundervollen Schöpfungen Poncelets als überflüssig hinzustellen und auf Umwegen dasjenige zu suchen, was man bei ernstem Willen viel einfacher und natürlicher auf dem geraden Wege erreichen könnte, das erinnert an die Zugvögel, die an den alt gewohnten Wanderlinien festhalten und die neueren, vorteilhafteren Verkehrswege unberücksichtigt lassen.

Ueber den vorliegenden ersten Teil der „Anwendungen“ ist im Besonderen wenig mehr hinzuzufügen. Wenn es in der Statik ein Gebiet gibt, auf welchem sich die graphischen Methoden nicht in ihrem vollen praktischen Werte zeigen, so ist es die Theorie der im Inneren eines Balkens wirkenden Kräfte. Wollte man sich damit begnügen, nur dasjenige niederzuschreiben, was sich brauchen lässt und den nächstliegenden Bedürfnissen entspricht, so wäre dieser erste Teil bedeutend magerer ausgefallen. Auch in dieser Hinsicht hat der Bearbeiter sich bestrebt, dem Vorgange seines Meisters treu zu bleiben und mit Hülfe von Zirkel und Zeichenstift auch Fragen zu beleuchten, die abseits des breitgetretenen Weges liegen und vielleicht erst später ihre „praktische“ Bedeutung erlangen.

Das erste Kapitel enthält die interessanten Entwicklungen über innere Spannungen, welche Culmann schon in der zweiten Auflage des ersten Bandes unter der Ueberschrift „Elemente der Elasticitätstheorie“ veröffentlicht hat. Diese Entwicklungen schienen mir als Ausgangspunkt und Grundlage der Theorie der inneren Kräfte besser hierher zu passen und stehen mit dem Inhalt der übrigen Kapitel in so enger Verwandtschaft, dass ein blosser Hinweis auf jene Quelle kaum zulässig war.

Im zweiten Kapitel wird im Wesentlichen nichts Anderes geboten, als was man gewöhnlich Festigkeitslehre nennt; doch sind dabei gewisse Seiten dieser Lehre etwas schärfer behandelt und einige schätzbare geometrische Beziehungen mit eingeflochten worden. Dass in diesem Kapitel die „graphische“ Methode vor der Rechnung in den Hintergrund treten musste, findet seine

naheliegende Erklärung in dem Umstande, dass die alltäglichsten Festigkeitsberechnungen ihrer Einfachheit wegen stets mittelst Formeln ausgeführt werden.

Aehnliches gilt zum Teil von dem folgenden dritten Kapitel; den Hauptraum desselben nimmt jedoch die zeichnerische Bestimmung der Maximalspannungen und der Spannungstrajectorien ein, ein Feld, auf welchem die Rechnung nur schwer manövriren kann.

In das vierte Kapitel sind endlich diejenigen Betrachtungen aufgenommen, welche sich auf die elastischen Formänderungen unserer Balken und Träger beziehen. Der Schwerpunkt dieses Abschnittes liegt in der Ableitung der Elasticitätsellipse, und wenn auch die weittragende Bedeutung dieser Kurve erst in den zwei letzten Teilen dieses Werkes recht zu Tage tritt, so schien es mir doch notwendig, ihr schon hier eingehende Aufmerksamkeit zu schenken und dadurch auf spätere Entwicklungen hinzuleiten.

Für die beigefügten sechs Tafeln ist, wie für den Text, das frühere Format beibehalten worden, obgleich ein etwas grösserer Raum oft willkommen gewesen wäre. Wenn die Zeichnungen trotz der hierdurch bedingten Kleinheit und Gedrängtheit noch deutlich geworden sind, so ist dies hauptsächlich der vorzüglichen Ausführung zuzuschreiben, welche die Tafeln in der lithographischen Anstalt von Wurster, Randegger & Cie. erhalten haben. Im Uebrigen gilt auch hier die Bemerkung, welche Culmann schon früher den Tafeln mit auf den Weg gab: Man betrachte sie als Vorlagen, die zeigen sollen, wie etwa in doppeltem Massstabe construirt werden kann. —

Der zweite Teil dieser „Anwendungen“ wird voraussichtlich noch vor Ablauf dieses Jahres druckbereit sein.

Zürich, im Mai 1888.

W. Ritter.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Spezifische Spannungen.

Zweites Kapitel.

Gleichgewicht zwischen äusseren und inneren Kräften.

Drittes Kapitel.

Construction der inneren Kräfte an verschiedenen Beispielen.

Viertes Kapitel.

Elastische Formänderungen.

Verzeichnis der Tafeln.

Erstes Kapitel.

Spezifische Spannungen.

---

1. Spannungen im Allgemeinen.

Wenn ein fester Körper von äusseren Kräften in Anspruch genommen wird, so entstehen im Innern des Körpers Spannungen, welche bestrebt sind, die Moleküle desselben voneinander zu reissen oder über einander wegzuschieben. Der Widerstand, den das Material diesem Bestreben entgegenstellt, heisst seine Festigkeit. Wird dieser Widerstand überwunden, so tritt eine Trennung der Moleküle, ein Riss oder Bruch ein.

Schon bevor diese Trennung eintritt, ja schon bei der geringsten Inanspruchnahme durch innere Spannungen erleiden die Moleküle Aenderungen in ihrer gegenseitigen Stellung oder Lagerung, und der Körper, als Ganzes betrachtet, erfährt eine Aenderung seiner Form. Entfernt man die Ursachen, welche diese Lageänderungen hervorgerufen haben, so kehren die Moleküle ganz oder teilweise wieder in ihre ursprüngliche Stellung zurück. Diese Eigenschaft des Materials nennt man seine Elasticität. Bei den meisten unserer Baumaterialien findet sich eine Grenze vor, innerhalb welcher die Moleküle nach jeder Beanspruchung ihre frühere Lagerung wieder annehmen; bewirken jedoch die äusseren Kräfte eine Verschiebung über diese Grenze hinaus, so verschwindet diese Verschiebung nur teilweise, es bleibt eine Aenderung in der gegenseitigen Stellung der Moleküle und damit auch eine Aenderung der Körperform bestehen. Die Erfahrung zeigt, dass die Lageänderungen der Moleküle innerhalb der genannten «Elasticitätsgrenze» den auftretenden Spannungen annähernd proportional sind.

Da in der Bautechnik das Material nur ausnahmsweise über die Elasticitätsgrenze hinaus in Anspruch genommen wird, so machen wir in der Folge (namentlich im vierten Kapitel), wo nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt wird, stets die Voraussetzung,

dass sich die Spannungen und somit auch die Verschiebungen und Formänderungen innerhalb dieser Grenze bewegen.

Sind die Spannungsverhältnisse eines Körpers bekannt, so lässt sich für jede kleine, im Innern des Körpers gedachte Schnittfläche eine bestimmte Kraft angeben, welche bestrebt ist, die zu beiden Seiten dieser Fläche gelegenen Körperteilchen auseinander zu reissen, gegen einander zu pressen oder über einander wegzuschieben. Diese Kraft wird mit der kleinen Fläche einen bestimmten Winkel einschliessen und lässt sich stets in eine normale und eine parallele oder transversale Seitenkraft zerlegen. Die normale Seitenkraft wird Zug- oder Druckkraft genannt, je nachdem sie die beiden Körperteile auseinander zu ziehen oder gegen einander zu drücken bestrebt ist; die transversale Seitenkraft heisst Schub- oder Scherkraft, weil sie ein Uebereinanderschieben oder Abscheren der Körperteilchen anstrebt. Betrachtet man speziell den einen der anliegenden Körperteile, so nimmt die diesen Teil beanspruchende Kraft einen bestimmten Richtungssinn an; fasst man den andern Teil ins Auge, so erhält die Kraft den entgegengesetzten Sinn.

Ist die Schnittfläche unendlich klein, so lässt sich stets annehmen, die auf dieselbe einwirkenden Kräfte seien gleichförmig verteilt und deren Mittelkraft gehe durch den Schwerpunkt der Fläche. Für die Berechnung und Vergleichung der inneren Spannungen ist es am vorteilhaftesten, die auf ein kleines Flächenelement wirkende Kraft durch den Inhalt dieser Fläche zu dividiren; den Quotienten, das heisst die auf die Flächeneinheit bezogene innere Kraft nennt man die spezifische Spannung.

Durch irgend einen Punkt im Innern eines Körpers lassen sich nun in unendlich vielen Richtungen Schnittflächen legen, und für jede derselben wird sich eine spezifische Spannung von bestimmter Grösse und Richtung ergeben. Die Veränderlichkeit dieser Spannungen und ihre Beziehungen zu den Schnittrichtungen zu untersuchen, ist die Hauptaufgabe des vorliegenden Kapitels. Im Allgemeinen wird man dabei räumliche Verhältnisse und Gebilde ins Auge fassen müssen. Häufig lässt sich jedoch die Untersuchung in der Ebene durchführen. Dies ist der Fall, wenn sich (wie bei stabförmigen, auf Zug, Druck oder Biegung beanspruchten Körpern) Schnittflächen angeben lassen, auf welche keinerlei Spannungen einwirken. Auch wenn sich (wie bei den meisten Aufgaben der Erddrucktheorie) parallele Schnittflächen führen lassen, die ausschliess-

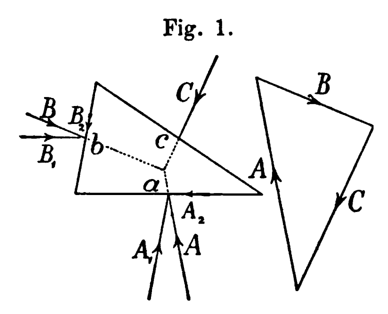
lich von normalen und von Fläche zu Fläche sich gleich bleibenden Spannungen beeinflusst werden, kann die Untersuchung auf die Ebene beschränkt werden.

Im Nachfolgenden soll nun zunächst dieser einfachere Fall und erst hernach der allgemeinere behandelt werden. Wir fassen dabei Körperelemente ins Auge, welche die Gestalt eines Prismas von der Höhe Eins besitzen. Alle Zusammensetzungen von Kräften werden jetzt in der Querschnittsebene des Prismas ausgeführt und die spezifischen Spannungen beziehen sich kurzweg auf die in dieser Ebene vorhandenen Linien.

2. Spannungen in der Ebene.

Bildet man (Fig. 1) ein Elementardreieck von den Seiten a, b und c, auf welche die Spannungen A, B und C wirken, so lässt sich im Allgemeinen die Richtung einer der drei Kräfte finden, sobald die Richtungen der beiden andern bekannt sind. Denn kennt man zum Beispiel die Richtungen von A und B und zieht man durch die Mitten der Seiten a und b die Richtungslinien dieser Kräfte, so geht die Richtung der Kraft C, welche mit A und B notwendig im Gleichgewicht sein muss, durch den Schnittpunkt der Kräfte A und B und durch die Mitte von c. Dadurch ist zugleich auch das Verhältnis der drei Kräfte gegeben; sie verhalten sich wie die Seiten des in der Figur 1 rechts gezeichneten Kräftedreiecks. Sind die Richtungen der drei Kräfte bekannt, so kann die Grösse nur einer derselben willkürlich angenommen werden; ist dies geschehen, so ist dadurch auch die Grösse der beiden andern bestimmt.

Fig. 1.



So einfach auch die Construction der Figur 1 ist, so ist es doch für die Anwendung häufig bequemer, die Abhängigkeit der Kräfte A und B dadurch auszudrücken, dass man sie in ihren Angriffspunkten nach den Richtungen a und b in je zwei Seitenkräfte A_1 und A_2, B_1 und B_2 zerlegt. Da nun die Mittelkraft der vier Seitenkräfte gleich und entgegengesetzt C ist, die Kräfte A_1

und B_1 aber offenbar durch die Mitte von c gehen, so muss auch die Mittelkraft der zwei Kräfte A_2 und B_2 durch diesen Punkt gehen. Damit dies aber der Fall sei, müssen sie sich zu einander verhalten wie die Seiten a und b; es muss demnach $\frac{A_2}{a} = \frac{B_2}{b}$ sein. Da diese Brüche spezifische Spannungen darstellen, so folgt der Satz:

Zerlegt man an irgend einem Punkte die auf zwei verschieden gerichtete Schnitte wirkenden spezifischen Spannungen parallel zu diesen Richtungen in je zwei Seitenkräfte, so sind diejenigen zwei Seitenkräfte, welche zu den ihnen zugehörigen Schnitten parallel laufen, einander gleich.

Stehen a und b aufeinander senkrecht, so stellen A_1 und B_1, A_2 und B_2 die normalen und transversalen Componenten der Spannungen dar, und man kann daher sagen:

Die in zwei aufeinander senkrechten Schnitten wirkenden transversalen Spannungen sind einander gleich.

Wird in der Figur 1 die Kraft A_2 gleich null, so verschwindet hiernach auch die Seitenkraft B_2. Daraus folgt, dass wenn die Spannung A parallel zu b gerichtet ist, auch die Spannung B parallel zu a laufen muss; oder:

Ist die Kraft A bekannt, welche auf den Schnitt a wirkt, so läuft die Kraft B, welche auf einen zu A parallelen Schnitt wirkt, mit a parallel.

3. Die Involution der conjugirten Schnittrichtungen.

Nach dem Schlusssatz der vorigen Nummer lässt sich zu jeder Schnittrichtung eine zweite finden, die der ersteren derart zugewiesen ist, dass die Spannung des ersten Schnittes zur Richtung des zweiten und die Spannung des zweiten Schnittes zur Richtung des ersten parallel läuft. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass alle auf diese Weise conjugirten Schnittrichtungen im Sinne der projectivischen Geometrie einen involutorischen Strahlenbüschel bilden.

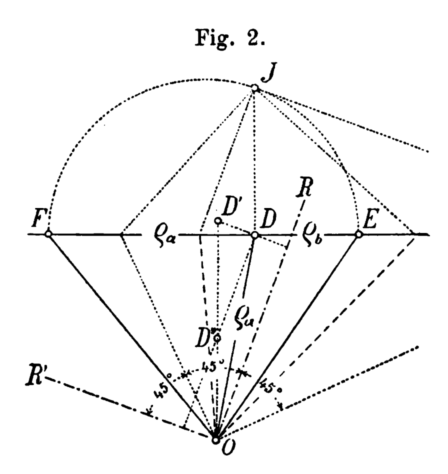
Verändert man nämlich in dem Elementardreieck der Figur 1 die Richtung der Seite c und hält hierbei die Länge der Seite a fest, so dass sich die Seite c um ihren rechtsseitigen Endpunkt

dreht, so bleibt auch die Kraft A im Kräftepolygon constant und die Kraft C dreht sich um ihren unteren Endpunkt. Da aber die Kraft B der Länge b proportional bleibt, so beschreiben hierbei die Endpunkte von b und B ähnliche Punktreihen, und da die Linien c und C diese Reihen aus festen Punkten projiciren, so sind die beiden Strahlenbüschel zueinander projectivisch. Nach dem oben bewiesenen Satze lassen sich aber je zwei zusammengehörende Richtungen vertauschen; die beiden Büschel sind daher involutorisch.

Geht man von zwei conjugirten Schnittrichtungen aus, das heisst, setzt man voraus, dass (Fig. 1) A zu b und B zu a parallel sei, und betrachtet man die Richtungen von a und b als Coordinatenaxen, so ist das Coordinatenverhältnis der Schnittrichtung c gleich $\frac{a}{b}$, dasjenige der Spannungsrichtung dagegen gleich $-\frac{B}{A}$. Bezeichnet man noch die spezifischen Spannungen $\frac{A}{a}$ und $\frac{B}{b}$ mit ϱ_a und ϱ_b, so geht letzterer Wert in $-\frac{\varrho_b \, . \, b}{\varrho_a \, . \, a}$ über, und wenn man nun die beiden Verhältnisse miteinander multiplicirt, so erhält man den constanten Wert $-\frac{\varrho_b}{\varrho_a}$.

Diese Involutionsconstante setzt uns in den Stand, noch verschiedene weitere Beziehungen abzuleiten.

Fig. 2.



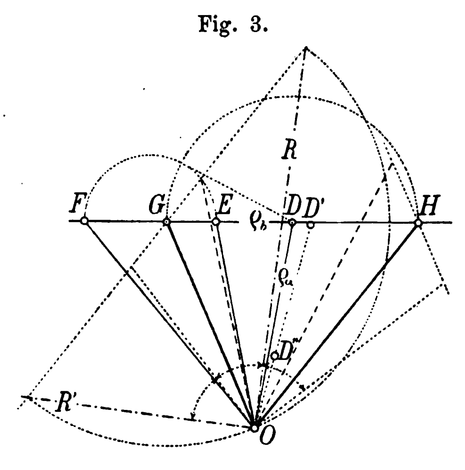
Trägt man (Fig. 2) von O aus in Richtung und Grösse die spezifische Spannung $\varrho_a = OD$ auf und fügt an diese in der Richtung von a nach rechts ϱ_b, nach links ϱ_a an, so stellen die Strahlen OE und OF zwei conjugirte Schnittrichtungen dar; denn das Coordinatenverhältnis des ersteren ist gleich $-\frac{\varrho_b}{\varrho_a}$, dasjenige des letzteren gleich $+1$, das Produkt beider somit gleich dem gegebenen Werte. Die Punkte E und F liegen nun involutorisch und der Punkt D ist, da er dem unendlich fernen Punkte ent-

spricht, der Mittelpunkt der Involution. Zeichnet man über EF einen Halbkreis und errichtet in D das Lot DJ, so schneiden die Schenkel jedes rechten Winkels aus J auf der Geraden EF zwei Punkte ab, die mit O verbunden zwei conjugirte Strahlen liefern.

Ein durch J und O gelegter Kreis mit dem Mittelpunkte auf EF bestimmt ferner das in der Figur strichpunktirte Rechtwinkelpaar OR, OR' der Involution. Schnitte in der Richtung dieser Strahlen erfahren nur normale (keine transversalen) Spannungen. Da jeder involutorische Büschel ein solches rechtwinkliges Strahlenpaar besitzt, so folgt, dass es stets zwei aufeinander senkrechte Schnittrichtungen gibt, auf welche nur normale Spannungen einwirken. Hat die Involution jedoch mehr als ein Paar rechtwinkliger Strahlen, so stehen alle conjugirten Strahlen aufeinander senkrecht; dann werden sämmtliche Schnitte nur in normaler Richtung beansprucht, ein Fall, der in der Hydrostatik stets vorkommt.

In der Figur 2 haben wir angenommen, die beiden Spannungen ϱ_a und ϱ_b haben gleiches Zeichen, das heisst, sie wirken beide auf Druck oder beide auf Zug. Haben sie dagegen ungleiches Zeichen, so entsteht die Figur 3. Auch hier ist OD gleich ϱ_a; von D aus sind aber beide Spannungen nach links hin aufgetragen. In diesem Falle hat die Involution Doppelstrahlen. Zeichnet man wieder über EF einen Halbkreis, legt von D aus die Tangente daran und schlägt deren Länge nach DG und DH herum, so sind OG und OH die Doppelstrahlen. Sind diese bekannt, so lassen sich leicht weitere Strahlenpaare finden; denn da jedes Paar durch die Doppelstrahlen harmonisch getrennt wird, so werden auf einer durch G gelegten Parallelen zu OH durch je zwei conjugirte Strahlen gleiche Strecken abgeschnitten. Beschreibt man aus G mit dem Radius GO einen Halbkreis, so erhält man die strichpunktirten Axenrichtungen,

Fig. 3.



welche wiederum diejenigen Schnitte angeben, welche nur in normaler Richtung beansprucht werden.

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass die Involution der Schnittrichtungen elliptisch oder hyperbolisch ist, je nachdem die auf zwei conjugirte Richtungen wirkenden Spannungen gleiches oder ungleiches Zeichen haben. Daraus ergibt sich ferner, dass im ersten Falle die Spannung für alle Schnitte dasselbe Zeichen behält, das heisst entweder eine Druck- oder eine Zugspannung ist. Im zweiten Falle dagegen ist die Spannung für zwei durch einen Doppelstrahl getrennte Schnitte entgegengesetzt gerichtet. Für die Doppelstrahlen selbst fällt die Spannungsrichtung mit der Schnittrichtung zusammen; das Material wird nur transversal oder scherend in Anspruch genommen. Fällt die Schnittrichtung dagegen mit einer der Axen zusammen, so wirken im Gegenteil auf das Material nur normale Spannungen.

Das bisher Entwickelte fassen wir nochmals kurz zusammen:

Wenn man von einem festen Punkte aus die auf jeden Schnitt wirkende Spannung aufträgt, so bilden diese Spannungen mit den Schnitten einen involutorischen Büschel conjugirter Richtungen.

Hat diese Involution keine Doppelstrahlen, so wird das Material in allen Schnitten in gleichem Sinne angegriffen. Auf Schnitte, welche in der Richtung der Axen laufen, wirken nur normale und keine scherenden Kräfte. Schnitte, welche nur scherend in Anspruch genommen werden, gibt es keine.

Hat die Involution Doppelstrahlen, so wirken auf Schnitte in der Richtung dieser Strahlen nur scherende Spannungen. Die Doppelstrahlen trennen die Schnitte, in welchen das Material auf Druck, von denjenigen, in welchen es auf Zug in Anspruch genommen wird. Die Strahlen, welche den von den Doppelstrahlen gebildeten Winkel halbiren, sind die Axen der Involution. Die Schnitte längs diesen Axen werden nur normal in Anspruch genommen, und zwar der eine auf Zug, der andere auf Druck.

Man erkennt ferner leicht, dass der Winkel zwischen zwei conjugirten Richtungen im ersteren Falle für diejenigen Strahlen am kleinsten wird, welche mit den Axen gleiche Winkel einschliessen.

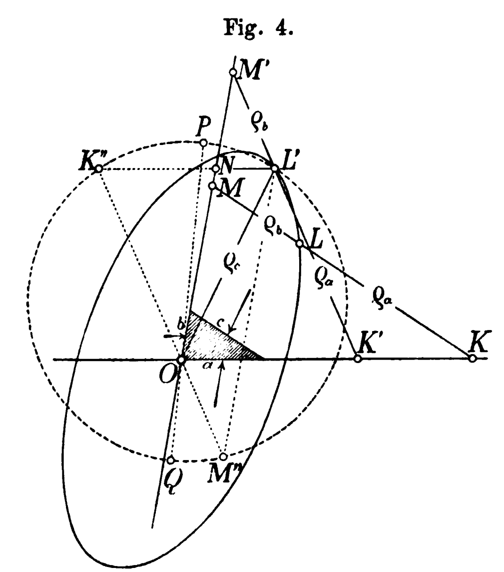
Wir nennen diese Strahlen die « symmetrischen » Strahlen der Involution. Handelt es sich um ein Material ohne innere Festigkeit, welches jedoch der Verschiebung seiner Teilchen Reibungswiderstände entgegensetzt (lockere Erde), so wird ein Uebereinandergleiten der Teilchen am ehesten längs den symmetrischen Strahlen stattfinden; wird der Reibungswinkel mit φ bezeichnet, so tritt ein Gleiten ein, sobald diese Strahlen den Winkel $90 - \varphi$ miteinander einschliessen.

4. Die Spannungsellipse.

Bis dahin haben wir hauptsächlich die Richtung der auf verschiedene Schnitte wirkenden Spannungen untersucht; wir wollen jetzt auch deren Grösse ins Auge fassen. Zu diesem Zwecke ist es am einfachsten, von zwei conjugirten Richtungen auszugehen.

Es seien, Figur 4, OK und OM zwei im Sinne der vorigen Nummer zu einander conjugirte Richtungen für den Punkt O, und ϱ_a und ϱ_b die zugehörigen spezifischen Spannungen. Schneidet man dann unter Annahme einer beliebigen dritten Richtung ein dreieckiges, in der Figur schraffirtes Element heraus, dessen Seiten gleich a, b und c sein mögen, und nennt die auf c wirkende spezifische Spannung ϱ_c, so steht die Kraft $C = \varrho_c . c$ mit den Kräften $A = \varrho_a . a$ und $B = \varrho_b . b$ im Gleichgewicht.

Fig. 4.



Wir ziehen nun parallel zu c eine Gerade KLM derart, dass, in irgend einem Massstabe aufgetragen, $KL = \varrho_a$ und $LM = \varrho_b$, also $KM = \varrho_a + \varrho_b$ ist. Hierauf machen wir $OK' = OM$ und $OM' = OK$, so dass $K'L'M'$ ebenfalls die Summe der beiden bekannten Spannungen darstellt. Dann ist OL' in Richtung und Grösse gleich der auf c wirkenden spezifischen Spannung ϱ_c.

Zieht man nämlich $L'N$ parallel zu OK, so verhält sich

$$ON : K'L' = OM' : K'M'$$

oder, da $K'L' = \varrho_a$ und das Dreieck $OK'M'$ dem Dreieck OKM congruent, somit dem Elementardreieck ähnlich ist,

$$ON : \varrho_a = a : c$$

$$ON = \frac{\varrho_a \cdot a}{c} = \frac{A}{c}.$$

Ebenso verhält sich

$$L'N : L'M' = OK' : K'M',$$

woraus folgt

$$L'N = \frac{\varrho_b \cdot b}{c} = \frac{B}{c}.$$

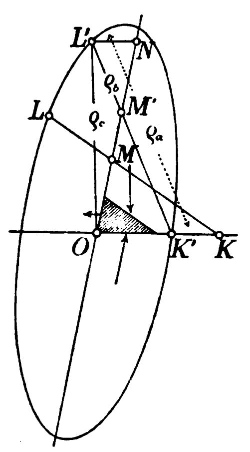
Die beiden Strecken ON und NL' verhalten sich daher zueinander wie die Kräfte A und B, und wenn man O mit L' verbindet, so erhält man in ONL' ein Dreieck, das dem Kräftedreieck ABC ähnlich ist. Daraus folgt sofort, dass

$$OL' = \frac{C}{c} = \varrho_c$$

ist.

In der Figur 4 ist vorausgesetzt, dass die Kräfte A und B die ihnen entsprechenden Schnitte in gleichem Sinne beanspruchen. Dasselbe Ergebnis erhält man auch in dem Falle, in welchem die beiden conjugirten Schnittrichtungen in verschiedenem Sinne in Anspruch genommen sind; man hat dann nur das Zeichen der in verändertem Sinne wirkenden Spannung zu ändern und demgemäss zu construiren.

Fig. 5.



Der Figur 5 ist dieser Fall zu Grunde gelegt worden. Da sämtliche Buchstaben dieselbe Bedeutung wie in der Figur 4 besitzen, so gelten obige Gleichungen ohne Weiteres auch hier. Es stellt also wiederum OL' die auf c wirkende spezifische Spannung dar.

Lässt man nun in den beiden Figuren die Schnittrichtung c sich ändern, so bewegt sich die Gerade $K'L'M'$ derart, dass der Abschnitt $K'M'$ constant (in dem einen Falle gleich $\varrho_a + \varrho_b$, in dem andern gleich $\varrho_a - \varrho_b$) bleibt; wenn aber eine Gerade sich so bewegt, dass zwei ihrer Punkte auf festen Linien

gleiten, so beschreibt bekanntlich jeder andere Punkt der Geraden eine Ellipse. Wir gelangen also zu dem Satze:

Trägt man von einem Punkte aus in Richtung und Grösse die spezifischen Spannungen auf, welche auf die verschiedenen Schnittrichtungen wirken, so liegen die Endpunkte aller dieser Spannungen auf einer Ellipse, der sogenannten «Spannungsellipse».

Zieht man (Fig. 4) durch L' Parallelen zu OK und OM und durch O eine Parallele zu $K'M'$, welche die ersteren in K'' bezw. M'' schneidet, so ist offenbar $OK'' = K'L' = \varrho_a$ und $OM'' = L'M' = \varrho_b$. Legt man sodann durch $K''L'M''$ einen Kreis, so wird dieser bei einer Drehung der Schnittrichtung c zwar seine Lage verändern, dabei aber denselben Durchmesser behalten, weil die Strecke $K''M''$ und der Winkel $K''L'M''$ unverändert bleiben. Betrachtet man nun die Strecke OL' als Radius vector dieses Kreises, so ist es klar, dass dieselbe ihren grössten und kleinsten Wert dann erhält, wenn sie mit dem Durchmesser des Kreises zusammenfällt. Ist PQ dieser Durchmesser, so ist somit OP gleich der grossen und OQ gleich der kleinen Halbaxe der Spannungsellipse.

Auch die Richtungen dieser Axen lassen sich leicht angeben. Während sich nämlich die Richtung des Schnittes c ändert, dreht sich der Kreis um den Punkt O, und zwar stets in entgegengesetzter Richtung wie c. Da hierbei die Punkte K'', M'', P und Q ihre gegenseitige Stellung nicht ändern und $K''L'$ stets parallel zu OK läuft, so fällt L' mit P, das heisst der Strahl OL' mit der Richtung der grossen Axe zusammen, wenn sich der Kreis um den Winkel $PK''L'$ nach rechts gedreht hat; da aber dieser Winkel gleich dem Winkel PQL' ist, so gibt $L'Q$ die Richtung der grossen, $L'P$ diejenige der kleinen Axe der Ellipse an.

Steht die Spannung A senkrecht zur Schnittrichtung OK, so wird das Elementardreieck ein rechtwinkliges, und die Schnittfläche OM wird ebenfalls normal beansprucht. Wenn wir auch jetzt wieder die Gerade $K'M'$ auf den Strahlen OK und OM gleiten lassen, so beschreibt der Punkt L' offenbar eine Ellipse, deren Axen sich mit OK und OM decken. Da zugleich die Richtungen OK und OM die Axen der in der vorigen Nummer besprochenen Involution bilden, so folgt:

Die Axen der Spannungsellipse fallen mit den Axen der Involution conjugirter Schnittrichtun-

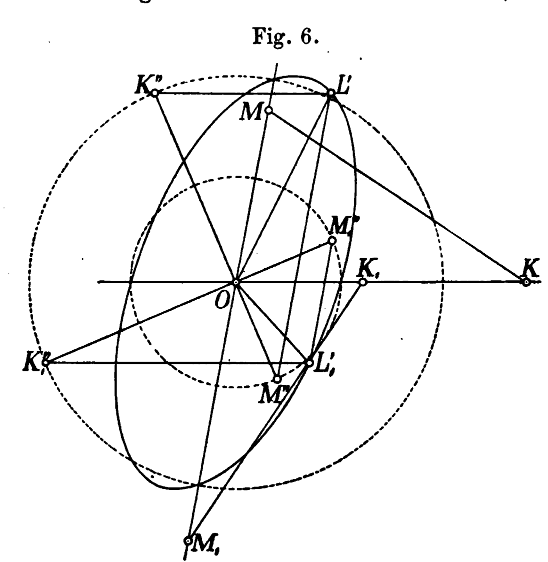
gen zusammen. Schnitte in der Richtung der Axen werden nur von normalen Spannungen beansprucht, und zwar wirkt auf den einen dieser Schnitte die grösste, auf den andern die kleinste aller Spannungen.

Da die Doppelstrahlen der hyperbolischen Involution mit den Axen gleiche Winkel bilden, gleich weit abstehende Durchmesser der Ellipse, aber gleich lang sind, so folgt weiter:

Die in der Richtung der beiden Doppelstrahlen wirkenden Transversalspannungen sind gleich gross.

Die Spannungsellipse kann man sich im Anschluss an obige Betrachtung auch so entstanden denken, dass man (Fig. 6) die Gerade $K'' M''$ um O sich drehen lässt und durch K'' und M'' Parallelen zu den festen Geraden OK und OM legt; die Punkte K'' und M'' beschreiben hierbei Kreise mit dem Mittelpunkt O und der Schnittpunkt L' der beiden Parallelen bewegt sich hierbei nach einem bekannten geometrischen Satze auf einer Ellipse. Diese steht mit jedem der beiden Kreise in affiner Verwandtschaft; in Bezug auf den grössern derselben bildet OM die Affinitätsaxe und OK die Affinitätsrichtung, für den kleinern umgekehrt.

Fig. 6.



Daraus folgt weiter, dass die Ellipsenpunkte, welche von zwei senkrecht auf einander stehenden Richtungen der Geraden $K'' M''$ herrühren, die Endpunkte conjugirter Durchmesser sind. Dreht man nun die Gerade $K'' M''$ um 90°, so dreht sich auch die Schnittrichtung um einen rechten Winkel und gelangt in die Lage $K_1 M_1$. Daraus ergibt sich der Satz:

Die Kräfte, welche zwei aufeinander senkrecht

stehende Schnitte beanspruchen, bilden conjugirte Durchmesser der Spannungsellipse.

Wir haben im Anschluss hieran in den Figuren 2 und 3 die Spannungsrichtungen für diejenigen Schnitte construirt, welche mit den Axen der Involution Winkel von 45° bilden. Die betreffenden Richtungen sind gestricht gezogen. Sie bilden nach obigem Satze conjugirte Durchmesser der Spannungsellipse und stehen überdies von den Ellipsenaxen OR und OR' gleich weit ab; folglich sind sie die Diagonalen des von den Scheiteltangenten der Ellipse gebildeten Rechteckes.

Die beiden Halbmesser der Ellipse verhalten sich nun wie die Perpendikel von irgend einem Punkte dieser Diagonalen auf die beiden Axen; das Axenverhältnis der Spannungsellipse ist somit bestimmt. Fällt man noch von dem Ellipsenpunkte D aus Perpendikel auf die beiden Axen, vergrössert das auf OR gefällte Perpendikel im Verhältnis des kleinen Halbmessers zum grossen und verkleinert das auf OR' gefällte im umgekehrten Verhältnis, so erhält man zwei neue Punkte D' und D'', welche (nach einer bekannten Ellipsenconstruction) von O um die Längen der Halbmesser abstehen.

Auf diese Weise lässt sich, wenn zwei conjugirte Schnittrichtungen mit ihren Spannungen bekannt sind, nicht nur die Involution der Schnittrichtungen, sondern auch die Spannungsellipse vollständig bestimmen. —

Die Involution der conjugirten Schnitte ist nicht etwa identisch mit derjenigen, welche die conjugirten Durchmesser der Spannungsellipse bilden; beide stehen jedoch in naher Beziehung zueinander. Denn wählt man in den Figuren 2 und 3 das rechtwinklige Strahlenpaar als feste Axen und nennt die entsprechenden Spannungen ϱ_{max} und ϱ_{min}, so wird das Produkt der Coordinatenverhältnisse oder die «Potenz der Involution» gleich $-\frac{\varrho_{min}}{\varrho_{max}}$. Die Involution der Ellipsendurchmesser dagegen ergibt, wie man aus dem oben besprochenen symmetrischen Durchmesserpaar sofort findet, die Potenz $-\left(\frac{\varrho_{min}}{\varrho_{max}}\right)^2$.

Der Unterschied zwischen den beiden Involutionen hat einige Schriftsteller veranlasst, auch den involutorischen Schnittrichtungen die Bedeutung von conjugirten Durchmessern beizulegen und hienach einen zweiten Kegelschnitt, die «Stellungsellipse» zu construiren.

Das Axenverhältnis dieser Kurve ergibt sich nach oben einfach gleich $\sqrt{\frac{\varrho_{min}}{\varrho_{max}}}$; es wird imaginär, das heisst, die Stellungsellipse geht in eine Hyperbel über, wenn die beiden Hauptspannungen entgegengesetztes Zeichen haben.

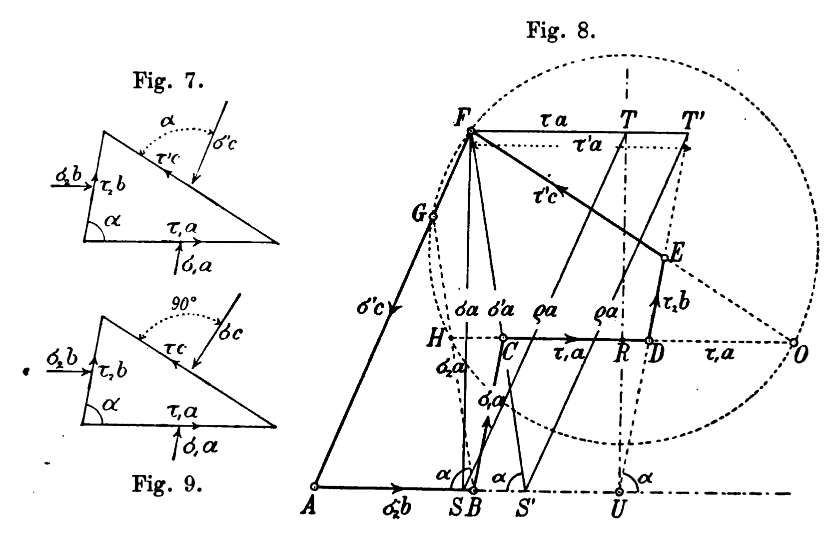
5. Allgemeine Construction der in jedem Schnitte wirkenden Spannung.

Um die allgemeinen Beziehungen zwischen verschiedenen Schnitten und den sie beanspruchenden Kräften zu entwickeln, war es zweckmässig, von zwei conjugirten Richtungen auszugehen; allein in der Regel sind diese nicht von vornherein gegeben, sondern die auf zwei beliebige Schnitte wirkenden Kräfte. Es soll nun gezeigt werden, wie auch in diesem Falle die auf andere Schnitte wirkenden Spannungen construirt werden können. Ueberdies müssen noch einige neue Beziehungen abgeleitet werden, welche sich ergeben, wenn die auf verschiedene Schnitte wirkenden Spannungen jeweilen in normale und transversale Componenten zerlegt werden.

Wir gehen (Fig. 7) wiederum von einem Elementardreieck aus, dessen Seiten gleich a, b und c sind. Die auf die Seiten a und b wirkenden spezifischen Spannungen ϱ_1 und ϱ_2 seien gegeben, die Spannung ϱ für den Schnitt c sei gesucht. Den Winkel zwischen a und b nennen wir α. Nun zerlegen wir die Spannung ϱ_1 parallel zu den Seiten a und b in zwei Seitenkräfte σ_1 und τ_1, ebenso ϱ_2 in σ_2 und τ_2; dann sind die beiden transversalen Spannungen τ_1 und τ_2 nach früher (Nr. 2) gleich gross. Auch die auf die dritte Seite c wirkende Spannung ϱ werde in zwei Einzelkräfte σ' und τ' zerlegt, und zwar so, dass τ' mit c zusammenfällt und σ' den Winkel α damit bildet. Zweck der Construction ist nun, für jede Richtung des Schnittes c die Werte σ' und τ' zu bestimmen.

Multiplicirt man jede der sechs Einzelkräfte mit der Länge der Seite, welche sie beansprucht, so erhält man sechs Kräfte, die sich das Gleichgewicht halten müssen. Trägt man sie (Fig. 8) von A aus in der Reihenfolge $\sigma_2 b$, $\sigma_1 a$, $\tau_1 a$, $\tau_2 b$, $\tau' c$, $\sigma' c$ auf, so entsteht das geschlossene Polygon $ABCDEFA$. Sind die vier ersten Kräfte bekannt, so lassen sich die zwei letzten durch Ziehen von Parallelen leicht finden.

Lässt man nun die Richtung von c sich ändern, während die Seiten a und b ihre Richtungen beibehalten, so ändern sich von den spezifischen Spannungen nur die Werte σ' und τ'. Am einfachsten verfährt man hierbei so, dass man die Länge von a festhält, also die Seite c um ihren rechten Endpunkt sich drehen lässt. Von den vier bekannten Kräften ändern dann nur die auf b bezüglichen, $\sigma_2 b$ und $\tau_2 b$ ihre Grösse. Um nun für jede Richtung der Seite c den Wert $\tau_2 b$ rasch zu finden, fügt man am besten rechts von D die Strecke $DO = \tau_1 a$ an, dann schneidet eine Parallele OE zu c jederzeit die Strecke $\tau_2 b$ ab, wie sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke DOE und abc und aus dem Umstand, dass $\tau_1 = \tau_2$ ist, sofort erkennen lässt. Aber auch $\sigma_2 b$ lässt sich leicht für beliebige Längen von b construiren: man trägt den constanten Wert $BG = \sigma_2 a$ unter dem Winkel α zur Horizontalen auf, dann schneidet die parallel zu σ' (das heisst unter dem Winkel α zur Richtung c) gezogene Gerade GA auf BA die Kraft $\sigma_2 b$ ab; denn auch das Dreieck ABG ist dem Elementardreieck ähnlich, und es verhält sich daher $AB : BG = b : a$.



Da die spezifischen Spannungen σ_1, σ_2 und τ_1 von der Richtung c unabhängig sind und a überdies constant angenommen wurde, so bleiben nun die Punkte $G\ B\ C\ D\ O$ bei veränderlicher Richtung des Schnittes c fest. Lässt man daher die Richtung von c in dem angedeuteten Sinne sich drehen, so beschreibt der Punkt F, da der

Winkel GFO constant gleich α ist, den über G, F und O gelegten Kreis; die Kraft $\sigma' c$ wird auf einer um G sich drehenden Geraden durch diesen Kreis und die Gerade AB abgeschnitten, während die Kraft $\tau' c$ als Abschnitt zwischen dem Kreis und der Linie DE einer um O sich drehenden Geraden erscheint.

Um aber die in der Seite c auftretenden Spannungen σ' und τ' mit den gegebenen Spannungen vergleichen zu können, müssen wir sie von dem veränderlichen Factor c befreien und mit einer constanten Länge multiplicirt darstellen. Zu diesem Zwecke ziehen wir die Linie FS', welche mit GB parallel läuft, also mit AB ebenfalls den Winkel α einschliesst, sowie die Horizontale FT' bis zur verlängerten Kraft DE; dann stellt, wie aus der Aehnlichkeit der Dreiecke hervorgeht, FS' die Kraft $\sigma' a$ und FT' die Kraft $\tau' a$ dar. Man kann sich kurz so ausdrücken: Die Kräfte $\sigma' a$ und $\tau' a$ sind die parallel zu $\sigma_2 a$ und $\tau_1 a$ gemessenen Coordinaten des Kreises GFO in Bezug auf die in U sich schneidenden Axen AB und DE. Da die beiden Coordinaten den Winkel α miteinander einschliessen, so stellt zugleich $S'T'$ die Grösse der Mittelkraft beider Kräfte, also die mit a multiplicirte Gesamtspannung ϱ der Schnittrichtung c dar.

Diese Gesamtspannung kann man, wie dies in der Figur 9 angedeutet ist, auch in zwei senkrecht auf einander stehende Componenten zerlegen; wir wollen diese neuen Einzelkräfte σ und τ nennen. Dann findet man die Kräfte σa und τa ohne weiteres, indem man in der Figur 8 die Verticalen FS und UT zieht. Denn offenbar wird bei dieser Zerlegung $\sigma = \sigma' . \sin \alpha$ und $\tau = \tau' - \sigma' . \cos \alpha$, und da in der Figur 8 sowohl FS' als auch $T'U$ mit ABU den Winkel α einschliesst, so stellt FS die Kraft σa und FT die Kraft τa dar; die Gesamtkraft ϱa dagegen wird sowohl durch die Strecke ST als auch durch die (offenbar gleich grosse) Strecke FU angegeben. Da die spezifischen Spannungen sich in keiner Weise ändern, wenn man die Seiten des Elementardreieckes proportional verkleinert oder vergrössert, so kann man die Seite a gleich der Längeneinheit setzen und sagen:

Die auf den Schnitt c wirkende spezifische Spannung ist gleich der Entfernung des auf dem Kreise FGO gleitenden Punktes F von U, und die jeweiligen Normal- und Transversalcomponenten derselben sind gleich den Coordinaten des Punktes F in Bezug auf

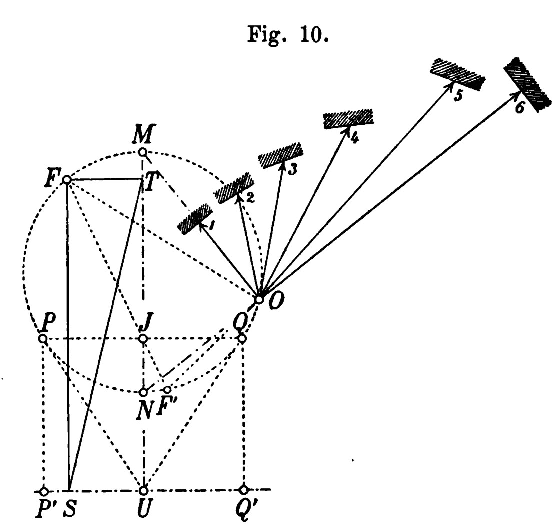
die durch U gelegten rechtwinkligen Axen; die jeweilige Schnittrichtung wird erhalten, wenn man F mit dem festen Kreispunkte O verbindet.

Der Punkt H, in welchem sich die Linien CO und BG schneiden, liegt, da diese Linien den Winkel α miteinander einschliessen, ebenfalls auf dem Kreise; da nun die Axe UT auf der Sehne HO senkrecht steht und diese Sehne zugleich in R halbirt, weil $RD = \frac{1}{2} HC$ und $DO = \frac{1}{2} CO$ ist, so geht die Axe UT durch den Mittelpunkt des Kreises.

Um das Spannungsdreieck FST in richtiger Lage zu erhalten, müsste man es so weit nach rechts drehen, bis die Transversalspannung FT parallel zur Schnittrichtung wird. Der Drehungswinkel ist daher gleich dem Winkel FOC.

Denkt man sich nun (Fig. 10) den Kreis mit dem Fixpunkte O und die Axen durch U gegeben und lässt den Punkt F auf dem Kreise gleiten, so erhält man in FO alle möglichen Schnittrichtungen und in FU die Grösse der jeweiligen Spannung. Die Normalcomponente der Spannung wird durch die Ordinate, die Transversalcomponente durch die Abscisse von F hinsichtlich der Axen durch U dargestellt. Die Richtung der Gesamtspannung ergibt sich, wenn man ST, die Verbindungslinie der Coordinatenfusspunkte von F um den Winkel, welchen FO mit der Horizontalen bildet, nach rechts dreht.

Fig. 10.



Die Gesamtspannung erreicht nun offenbar ihren grössten und ihren kleinsten Wert, wenn F in die verticale Axe durch U gelangt. In diesem Falle verschwindet zugleich die Transversalspannung τ, das heisst, die Gesamtspannung ϱ steht auf der Schnittrichtung senkrecht. Da FO jeweilen die Richtung des Schnittes angibt und die verticale Axe durch U ein Kreisdurch-

messer ist, so stehen die Schnitte, welche der Maximal- und der Minimalspannung entsprechen, auf einander senkrecht, wie schon in der vorigen Nummer entwickelt worden ist. In der Figur 10 geben daher die Linien OM und ON die Axenrichtungen und die Strecken UM und UN die Halbmesser der Spannungsellipse an; zugleich bilden OM und ON ein Paar conjugirter Schnittrichtungen.

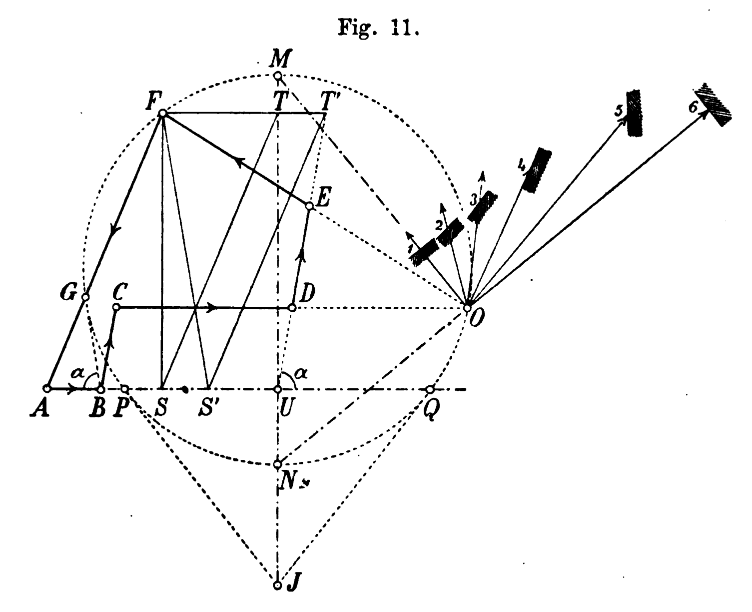
Ein zweites Paar conjugirter Schnitte findet man, wenn man von U aus Tangenten an den Kreis legt und F nach den beiden Berührungspunkten P und Q gelangen lässt. Fällt nämlich F mit P zusammen, so bildet PO die Schnittrichtung und JP' stellt die Gesamtspannung dar; um die Richtung dieser letzteren zu finden, hat man JP' um den Winkel OPQ nach links zu drehen; da aber JP' zu QU parallel läuft und der Winkel OPQ gleich demjenigen ist, den OQ mit der Tangente in Q, das ist mit QU bildet, so nimmt JP' nach dieser Drehung die Richtung OQ an. Die nämliche Betrachtung lehrt uns, dass die Spannung in der Richtung OP wirkt, wenn der Schnitt parallel OQ geführt wird. Somit sind auch OP und OQ im Sinne der Nummer 3 einander conjugirt.

Da nun OM mit ON und OP mit OQ involutorisch gepaart ist, so stellt der Pol J der durch U gehenden Horizontalen das Involutionscentrum dar, und man erhält je ein weiteres Paar conjugirter Schnittrichtungen, wenn man die Endpunkte der durch J gelegten Kreissehnen mit O verbindet. Hierdurch ist ein einfaches Mittel gegeben, um für jede beliebige Schnittrichtung die zugehörige Spannung auch der Richtung nach rasch zu finden. In der Figur 10 haben wir diese Spannungen für sechs verschiedene Schnitte bestimmt und von O aus aufgetragen; zugleich sind an den Endpunkten dieser Strahlen, welche nach früher auf einer Ellipse liegen, die betreffenden Schnittrichtungen durch kleine, mit Schraffur versehene Striche angegeben worden. —

In der Figur 11 haben wir auch noch den Fall dargestellt, bei welchem die Involution der Schnitte und Kräfte hyperbolisch ist. Hier schneidet die Horizontale durch U den Kreis; aber nichtsdestoweniger gelten alle unsere Erwägungen auch hier: Das Polygon $ABCDEFA$ entsteht aus der Zusammensetzung der sechs Kräfte, welche die drei Seiten des Dreieckes abc beanspruchen; die Aenderung der Richtung von c führt auf den durch die Punkte G, F und O gelegten Kreis; die Strecken FS' und FT' stellen

wie früher die Kräfte $\sigma' a$ und $\tau' a$, die Strecken FS und FT die Werte σa und τa dar, und der auf den Seiten 15 und 16 gesperrt gedruckte Satz gilt wörtlich auch von dieser Figur.

Fig. 11.



Ebenso ergibt sich ferner, dass OM und ON die zwei conjugirten Schnittrichtungen darstellen, in welchen das Material nur normal (nicht transversal) beansprucht wird. Dagegen stossen wir auf einen Unterschied zwischen beiden Figuren, wenn wir ein zweites Paar conjugirter Richtungen aufsuchen wollen; denn da der Punkt U innerhalb des Kreises liegt, so ist es unmöglich, von ihm aus Tangenten an den Kreis zu legen.

Für diesen Ausfall bieten uns die Punkte P und Q Ersatz, in denen der Kreis von der durch U gehenden Horizontalen geschnitten wird. Lässt man nämlich F mit P zusammenfallen, so wird die Normalspannung σ gleich Null; das heisst auf die Richtung OP wirkt nur eine transversale und keine normale Spannung. Da hier Schnitt- und Kraftrichtung zusammenfallen, so haben wir einen Doppelstrahl der Involution vor uns. Den zweiten Doppelstrahl finden wir in OQ, und es folgt hieraus sofort, dass wiederum der Pol J der durch U gehenden Horizontalen das Involutionscentrum bildet, welches uns das Zeichnen von beliebigen weiteren conjugirten Strahlen ermöglicht.

Mit Hülfe von J sind endlich auch in der Figur 11 für sechs verschiedene Schnitte die Spannungen construirt und von O aus aufgetragen worden. Der Schnitt 4 ist derjenige, welcher nur auf Abscheren in Anspruch genommen wird; 1, 2 und 3 dagegen haben Zug, 5 und 6 Druck auszuhalten. —

Aus dem Vergleich der Figuren 10 und 11 ergibt sich wie bei unseren früheren Betrachtungen, dass das Material in allen Schnitten im gleichen Sinne (entweder nur auf Druck oder nur auf Zug) beansprucht wird, wenn die Involution elliptisch ist, das heisst, keine Doppelstrahlen besitzt; dass dagegen eine Beanspruchung in entgegengesetztem Sinne stattfindet, wenn die conjugirten Schnittrichtungen Doppelelemente aufweisen, und zwar wechselt der Sinn der Beanspruchung beim Ueberschreiten der Doppelstrahlen; in diesen selbst wird das Material weder auf Druck noch auf Zug, sondern bloss scherend beansprucht.

Im ersteren Falle liegt der Punkt U ausserhalb, im letzteren innerhalb des Kreises. Liegt U auf dem Kreise, so fallen die beiden Doppelstrahlen zusammen und U deckt sich mit dem Punkt J; die kleine Axe der Spannungsellipse wird null; auf sämtliche Schnitte wirkt die Spannung in der constanten Richtung OU; die Grösse der Spannung nimmt ab, je mehr sich der Schnitt dieser Richtung nähert, und schneidet man das Material parallel zu OU, so verschwindet die Beanspruchung gänzlich.

Die conjugirten Strahlen, welche in der Figur 10 von O nach P und Q gezogen werden, bilden mit den Ellipsenaxen gleiche Winkel und haben mit den Doppelstrahlen in der Figur 11 ausser dieser Eigenschaft noch die weitere gemein, dass das Quadrat der Tangente des Winkels, den sie mit der einen Axe einschliessen — abgesehen vom Vorzeichen — dem Produkte der Tangenten der Winkel gleich ist, welche irgend zwei andere conjugirte Richtungen mit der Axe bilden. Durch diese symmetrischen Strahlen ist also auch die Involution bestimmt, da man durch Halbirung des von ihnen eingeschlossenen Winkels die Axen bekommt. —

Wir sind, um allgemein zu bleiben, bei den Betrachtungen dieser Nummer von den Spannungen ausgegangen, welche auf zwei beliebig zueinander gerichtete Schnitte wirken; hätten wir von Anfang an zwei auf einander senkrecht stehende Schnitte der Untersuchung zu Grunde gelegt, so wäre diese wesentlich einfacher und übersichtlicher ausgefallen. Es mag für den Leser nützlich sein,

sämtliche Entwicklungen unter dieser speziellen Voraussetzung zu wiederholen. Uebrigens kommen wir im zweiten Kapitel (Nr. 18) selbst auf diese vereinfachende Betrachtungsweise zurück.

6. Verschiedene Darstellungsweisen des Spannungszustandes.

Wird von der absoluten Grösse der Spannungen abgesehen und nur deren proportionale Aenderung von Schnitt zu Schnitt ins Auge gefasst, so genügt es zur vollständigen Darstellung der Inanspruchnahme, welche das Material in einem Punkte erfährt, die Lage der beiden symmetrischen oder der Doppelstrahlen anzugeben; denn zieht man dann durch ihren Schnittpunkt einen beliebigen Kreis und verbindet die beiden Punkte, in welchen dieser von den Strahlen getroffen wird, so ist der Pol dieser Verbindungslinie entweder der Punkt U oder der Punkt J, je nachdem die Involution elliptisch oder hyperbolisch ist; gibt man noch ausserdem an, in welchem Sinne das Material beansprucht wird, was mittelst der Zeichen $+$ und $-$ geschehen kann, so ist damit alles bestimmt. Soll auch noch die Grösse der Inanspruchnahme angedeutet werden, so kann man die Länge der symmetrischen, beziehungsweise der Doppelstrahlen begrenzen, indem man die in ihnen wirkenden Spannungen aufträgt.

Auch dadurch gelangt man zur vollständigen Darstellung aller Verhältnisse, dass man mit der zweifachen, in den symmetrischen oder Doppelstrahlen wirkenden Transversalspannung in den von diesen gebildeten Winkel hineinfährt und über dem sich hierbei bildenden Dreieck einen Kreis beschreibt; denn sowohl in der Figur 10 als auch in der Figur 11 ist die von den Strahlen OP und OQ abgeschnittene Kreissehne gleich $2\,\tau$.

Ferner wird die Inanspruchnahme des Materials, wie schon aus frühern Betrachtungen hervorging, durch die Richtung und Grösse der beiden Axen der Spannungsellipse bestimmt; trägt man die beiden Halbaxen von U aus in beliebiger Richtung auf, und zwar nach derselben Seite, wenn sie gleichen Sinn haben, dagegen nach entgegengesetzten Seiten bei ungleichem Sinne, so erhält man den Durchmesser des Kreises, und zwei durch dessen Endpunkte gelegte Parallelen zu den Ellipsenaxen liefern den Punkt O. Wählt man statt einer beliebigen Richtung gleich diejenige der grossen Axe,

so entsteht (für ungleiche Zeichen der Hauptspannungen) die Figur 12; O fällt mit M zusammen und MP und MQ sind die Doppelstrahlen.

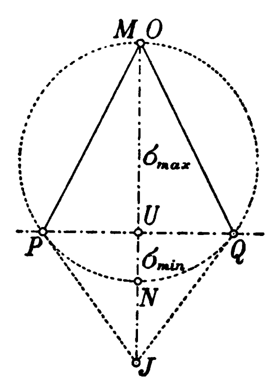


Fig. 12.

In der Regel sind aber weder die Doppelstrahlen noch die Axen der Involution von vornherein bestimmt, sondern die Spannungen, welche auf zwei beliebige Schnittrichtungen a und b (Fig. 7, S. 14) wirken. In diesem Falle gelangt man auf folgende Weise am schnellsten zur Darstellung sämtlicher Spannungen.

Man trägt (Fig. 13) von einem beliebigen Punkte G ausgehend, die gegebenen Spannungen σ_2, τ_2, σ_1 und τ_1 zu einem Kräftepolygon zusammen, und zwar die beiden letzteren in der Richtung, in der sie wirken, die beiden ersteren dagegen um den Winkel α gedreht, das heisst in derjenigen Richtung, welche sie annehmen, wenn man die Seite b des Elementardreiecks in die Seite a hinüberklappt; dann ist die gegenseitige Stellung der Punkte U und O bestimmt. Um den Kreis zu zeichnen, berücksichtigt man entweder, dass er durch die Punkte G und O und den Schnittpunkt H von σ_2 und τ_1 geht, oder dass der Peripheriewinkel über der Sehne GO gleich α ist, oder dass sein Mittelpunkt auf einer Verticalen durch U liegt. Fällt hierbei der Punkt U ausserhalb des Kreises, so wirken sämtliche σ in gleichem Sinne; wird dagegen U vom Kreise eingeschlossen, so kommen sowohl Zug- als auch Druckspannungen vor. Der letztere Fall tritt immer ein, wenn eines der beiden σ gleich null ist.

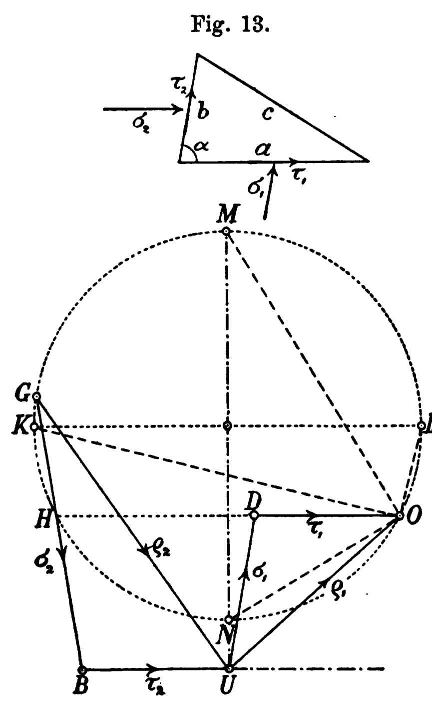


Fig. 13.

Noch rascher gelangt man zu dieser Darstellung des Spannungszustandes, wenn nicht die Seitenspannungen, sondern die Gesamtspannungen ϱ_1 und ϱ_2 gegeben sind: ϱ_2 wird um den Winkel α nach rechts gedreht und mit ϱ_1 zusammengesetzt; dann erhält man den Linienzug GUO. Nun geht der Kreis durch G und O und hat seinen Mittelpunkt auf der durch U gelegten Verticalen.

Da es sich hierbei nur um spezifische Spannungen handelt, so kann man auch die Bedeutung von a und b vertauschen, das heisst, die Spannung ϱ_1 um den Winkel α nach links drehen, sie mit ϱ_2 zusammensetzen und einen Kreis zeichnen, dessen Mittelpunkt auf einer durch U gezogenen Senkrechten zu b liegt; die Figur, welche man hierbei erhält, ist der vorigen, wie man leicht erkennt, congruent; nur erscheinen die Punkte G und O in ihrer Bedeutung vertauscht; die Ellipsenaxen nehmen jedoch in beiden Fällen die nämliche Richtung an.

Stehen die beiden Schnitte, für welche die Spannungen bekannt sind, auf einander senkrecht, so wird GO zum Durchmesser des Kreises.

Wirken auf die beiden Schnitte a und b gleich grosse, normal gerichtete Gesamtspannungen ϱ, so werden GU und UO vertical und G fällt mit O zusammen; der Kreis schrumpft zu einem Punkte zusammen; J wird zum Mittelpunkt desselben; die Involution der Schnittrichtungen hat lauter Rechtwinkelpaare; die transversalen Spannungen verschwinden gänzlich und die normalen sind für alle Schnitte constant. Dieses Verhältnis findet sich in der Hydrostatik vor.

7. Maximalspannungen; Spannungstrajectorien.

Nach den in der vorigen Nummer angestellten Betrachtungen genügt es, die auf zwei beliebige Schnitte wirkenden Spannungen zu kennen, um die Beanspruchung jedes anderen Schnittes zu ermitteln. Trägt man (Fig. 13) die auf b wirkenden Kräfte σ_2 und τ_2, um den Winkel α gedreht, auf, fügt an dieselben σ_1 und τ_1 an und zeichnet einen Kreis, der durch die Punkte G und O geht und dessen Mittelpunkt auf einer durch U gelegten, auf a senkrecht stehenden Geraden liegt, so findet man die spezifischen Normal- und Transversalspannungen, σ und τ, für eine beliebige Schnittrichtung,

indem man zu dieser eine Parallele durch O zieht und die rechtwinkligen Coordinaten ihres Schnittpunktes mit dem Kreise bezüglich der durch U gelegten Coordinatenaxen misst. Und zwar ist die zu a parallele Coordinate gleich τ, die dazu normale gleich σ.

Mit grosser Leichtigkeit lassen sich nun aus der Figur die grössten und kleinsten Werte dieser Spannungen, sowie die Schnittrichtungen, die zu denselben führen, herauslesen.

Ist MN der durch U gehende (zu a normale) und KL der darauf senkrecht stehende (zu a parallele) Durchmesser des Kreises, so begrenzt M den grössten, N den kleinsten Wert von σ, während K und L das Maximum und Minimum von τ bestimmen. Die Richtungen OM und ON stehen auf einander senkrecht; es sind die Axenrichtungen der Spannungsellipse; ebenso bilden OK und OL mit einander einen rechten Winkel und mit den vorhin genannten Strahlen Winkel von 45°.

Die beiden Schnittrichtungen, in denen die Transversalspannung am grössten wird, stehen aufeinander senkrecht und schliessen mit den Schnitten grösster Normalspannung halbe rechte Winkel ein.

Ferner lassen sich der Figur noch die folgenden Beziehungen entnehmen, die sich zum Teil mit früheren Sätzen decken:

Die Maximalwerte der transversalen Spannung sind absolut stets gleich gross, diejenigen der normalen dagegen im Allgemeinen verschieden.

Das Maximum der transversalen Spannung kann, absolut genommen, niemals grösser werden als dasjenige der normalen Spannung; es ist stets gleich der halben Differenz zwischen der grössten und kleinsten Normalspannung.

In denjenigen Schnitten, in welchen die normale Spannung zum Maximum oder Minimum wird, kommen keine transversalen Spannungen vor; wohl aber wirken in den Schnitten, in welchen die Transversalspannung am grössten wird, auch normale Spannungen.

Die Summe der Normalspannungen auf zwei zueinander senkrechte Schnitte ist constant und gleich der Summe der beiden Maximalspannungen. —

Sind für einen Punkt die Axen der Spannungsellipse, also

die Schnittrichtungen, in welchen das Material nur Normalspannungen erfährt, bestimmt und geht man in der einen der beiden Richtungen zu einem unendlich benachbarten Punkte über, für den man wieder die betreffende Richtung ermittelt, und so fort, so erhält man eine krumme Linie, in deren Richtung das Material nur normal beansprucht wird, längs deren also keine scherenden Spannungen wirken. In gleicher Weise kann man der andern der beiden Richtungen folgen und gelangt so auf eine zweite Kurve, welche dieselben Eigenschaften besitzt und die erstere unter rechtem Winkel kreuzt. Nimmt man einen beliebigen andern Punkt als Ausgangspunkt, so erhält man zwei weitere solcher Kurven. So kann man die ganze Fläche mit zwei Systemen von Trajectorien überdecken, die sich gegenseitig stets unter rechten Winkeln schneiden und welche für jeden Punkt die Richtungen angeben, nach welchen sich die normalen (Zug- oder Druck-) Spannungen fortpflanzen. Diese Linien haben den Namen Spannungstrajectorien oder auch Zug- und Druckkurven erhalten.

Lässt man die Trajectorien unendlich nahe aufeinander folgen, so teilen sie die Fläche in zweimal unendlich viele, unendlich kleine Rechtecke ein. Jede einzelne Kurve kann man als ein Seilpolygon betrachten, das dadurch entsteht, dass man die in den gekreuzten Kurven wirkenden Kräftedifferenzen der Reihe nach zusammensetzt.

Diese Trajectorien sind in der Natur an verschiedenen Stellen vorhanden, worauf wir im dritten Kapitel zurückkommen werden. Auch unsere Fachwerke mit unter 45° geneigten Streben stellen dieselben in gewissem Sinne dar.

Den soeben besprochenen Linien entsprechend lassen sich auch solche ziehen, welche die Schnittrichtungen mit grösster Transversalspannung angeben. Diese Kurven, welche man «Scherkurven» nennen könnte, kreuzen sich ebenfalls gegenseitig unter rechten Winkeln und schneiden zugleich sämtliche Zug- und Druckkurven unter Winkeln von 45°.

Endlich ist noch ein drittes System von Kurven darstellbar, welches denjenigen Schnittrichtungen folgt, auf welche keine Normalspannungen einwirken. Diese Linien folgen den Doppelstrahlen der Involution und schneiden sich, wo sie einander treffen, im Allgemeinen unter schiefen Winkeln. Soweit die Involution elliptisch ist, werden diese Kurven selbstverständlich imaginär.

8. Spezifische Spannungen im Raume.

Wir setzen nun voraus, dass die Inanspruchnahme des Materials nicht mehr unverändert bleibe, wenn man in einer bestimmten Richtung fortschreitet, sondern dass sie sich nach allen Richtungen von Punkt zu Punkt ändere.

Um die spezifischen Spannungen zu untersuchen, welche in diesem Falle auf verschiedene Schnittflächen wirken, gehen wir von einem kleinen Körperelemente aus, das von vier Ebenen begrenzt wird, und nehmen an, die auf drei derselben wirkenden Kräfte seien bekannt; durch Zusammensetzen dieser Kräfte erhält man dann die auf die vierte Schnittfläche wirkende Kraft. Da man das Körperelement beliebig klein annehmen kann, so ist es gestattet, die Kräfte als gleichförmig verteilte anzusehen, so dass die Mittelkräfte in den Schwerpunkten der vier Flächen des Elementes angreifen.

In der Figur 14 ist ein solches Element dargestellt; die drei Flächen AOB, BOC und COA betrachten wir als diejenigen, deren Inanspruchnahme bekannt ist. Analog wie bei der in der Nummer 2 angestellten Untersuchung zerlegen wir auch hier die drei gegebenen Kräfte in Componenten, welche parallel zu den Axen OA, OB und OC laufen und bezeichnen hierbei mit S_g diejenige Componente, welche auf die Fläche g, parallel zur Kante g wirkt, und mit T_{gi} diejenige, welche in der Fläche g parallel zur Kante i wirkt.

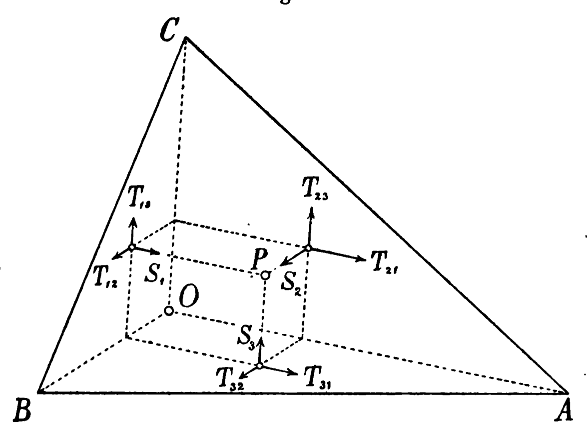
Da nun die Mittelkraft sämtlicher S und T im Schwerpunkt P der Fläche ABC angreift, die drei Kräfte S aber durch diesen Punkt gehen, so muss auch die Mittelkraft sämtlicher T den Punkt P enthalten. Setzt man nun T_{12} mit T_{21} zusammen, so bekommt man eine Kraft, die in einer zu AOB parallelen Ebene durch P liegt; ebenso liegen die Mittelkräfte von T_{23} und T_{32}, und von T_{31} und T_{13} in Ebenen durch den Schwerpunkt des Dreiecks ABC. Wenn aber die Mittelkraft von drei Kräften, die in drei verschiedenen Ebenen liegen, durch den Schnittpunkt dieser letzteren gehen soll, so muss auch jede einzelne Kraft durch diesen Punkt gehen.

Wenn man daher die sechs Kräfte T paarweise zusammensetzt, so erhält man drei durch P gehende Mittelkräfte. Daraus folgt sofort, dass sich beispielsweise T_{12} und T_{21} zu einander verhalten

müssen wie $O\dot{B}$ zu OA; oder allgemein: $T_{gi} : T_{ig} = i : g$. Bezeichnet man die spezifische Scherspannung wie früher mit τ, die drei Kantenlängen der Einfachheit halber mit a, b und c und die drei Kantenwinkel mit α, β und γ, so lässt sich schreiben $T_{12} = \tau_{12} \cdot {}^1/_2\, b\, c \sin \alpha$ und $T_{21} = \tau_{21} \cdot {}^1/_2\, a\, c \sin \beta$, woraus auf Grund obiger Proportion folgt

$$\tau_{12} \sin \alpha = \tau_{21} \sin \beta$$
$$\tau_{23} \sin \beta = \tau_{32} \sin \gamma$$
$$\tau_{31} \sin \gamma = \tau_{13} \sin \alpha.$$

Fig. 14.



Zerlegt man die spezifischen Spannungen, welche drei durch einen Punkt gelegte Ebenen beanspruchen, parallel zu den Schnittlinien dieser Ebenen in je drei Seitenkräfte, so verhalten sich je zwei der in verschiedenen Ebenen liegenden Seitenkräfte, welche parallel zu der dritten Ebene laufen, umgekehrt wie die Sinusse der in diesen beiden Ebenen liegenden Kantenwinkel.

Stehen die drei Kanten aufeinander senkrecht, so sind je zwei sich schneidende τ einander gleich.

Bezeichnet man die drei Richtungen $O)$ ABC mit xyz und lässt die drei Kantenlängen unendlich klein werden, so dass die auf die drei Flächen einwirkenden Kräfte durch O gehen, so liegen die Axe Oz und die auf die xy-Ebene wirkende Kraft in einer Ebene, deren Gleichung lautet:

$$x : y = T_{31} : T_{32} \quad \text{oder} \quad T_{32}\, x = T_{31}\, y.$$

Verbindet man gleicherweise die x-Axe mit der auf BOC wirkenden Kraft, sowie die y-Axe mit der auf AOC wirkenden Kraft durch je eine Ebene, so lauten deren Gleichungen:

$$T_{13}\,y = T_{12}\,z \quad \text{und} \quad T_{21}\,z = T_{23}\,x.$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt, dass die drei Ebenen sich in einer einzigen Geraden schneiden. Denn da sich nach früher $T_{gi} : T_{ig}$ verhält wie $i : g$, so ist das Produkt der drei linken Glieder identisch gleich dem Produkt der drei rechten. Wir finden somit den Satz: Die drei Ebenen, welche je eine Kante mit der die gegenüber liegende Fläche beanspruchenden Kraft verbinden, schneiden sich in ein und derselben Geraden.

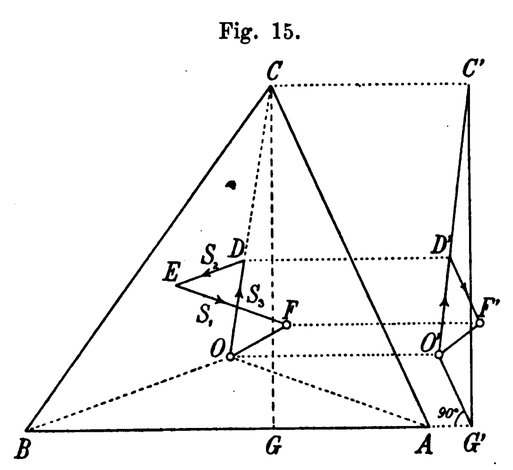
Läuft in der Figur 14 die Kraft, welche die Fläche AOC beansprucht, parallel zur Ebene BOC, so verschwindet die Componente T_{21} und mit ihr auch die Kraft T_{12}; dann ist aber die Kraft, welche auf die Ebene BOC wirkt, auch parallel zur Ebene AOC; denn sie setzt sich jetzt bloss aus S_1 und T_{13} zusammen. Es folgt daher der Satz: Wenn die Kraft, welche auf die eine Schnittfläche wirkt, parallel zu einer zweiten Fläche gerichtet ist, so läuft auch die Kraft, welche diese zweite Fläche beansprucht, parallel zu der ersten. Ist die Kraft, welche AOC beansprucht, ausserdem noch parallel zu AOB, also parallel zur Kante OB gerichtet, so werden auch die Kräfte T_{23} und T_{32} gleich null und die Beanspruchung der Ebene AOB wird ebenfalls parallel zu AOC. Verschwinden schliesslich auch noch T_{13} und T_{31}, so läuft von den drei Kräften, welchen die drei Flächen ausgesetzt sind, jede parallel zur Schnittlinie der beiden andern Flächen. Weist man die Schnittebenen und die Richtungen der auf sie wirkenden Kräfte einander als conjugirte Elemente zu, so bekommt man in diesem Falle ein Tripel conjugirter Elemente.

Ein solches Tripel findet man auf folgendem Wege: Geht man von der Ebene AOB und der sie beanspruchenden Kraft aus und macht OC parallel zu dieser Kraft, legt sodann durch diese Kante eine beliebige zweite Ebene BOC und bestimmt die auf diese wirkende Kraft, so wird diejenige durch OC gehende Ebene, welche zu dieser Kraft parallel ist, mit den beiden andern ein Tripel bilden.

Um nun die Beziehungen zwischen verschiedenen Schnittebenen und den auf sie wirkenden Kräften zu studiren, gehen wir von einem

solchen Tripel conjugirter Elemente aus. In der Figur 15 seien sämtliche Transversalspannungen gleich null; auf die drei Flächen AOB, BOC und COA wirken ausschliesslich die zu den Kanten parallelen Kräfte S_3, S_1 und S_2. Tragen wir, von O ausgehend, diese Kräfte zu einem Polygon aneinander, so stellt OF die Kraft dar, mit welcher die Fläche ABC in Anspruch genommen wird. Denkt man sich nun, die Ebene ABC drehe sich um die Linie AB, so bleibt die Kraft S_3 constant; die Kräfte S_2 und S_1 jedoch ändern sich proportional den Flächeninhalten von AOC und BOC; da aber diese beiden der Linie OC proportional sind, so bleibt die Richtung der Mittelkraft von S_2 und S_1 constant, das heisst F bewegt sich auf der Geraden DF und die Kraft OF in der Ebene ODF. Wird OC unendlich gross, das heisst die Fläche ABC parallel zur Kante OC, so verschwindet die Kraft S_3 gegenüber den beiden andern und die Mittelkraft OF fällt in die Ebene AOB. In diesem Falle gelten für die Schnittrichtung AB und die Kraft OF alle die Gesetze, welche wir für Spannungen in der Ebene abgeleitet haben; insbesondere bilden Schnitt- und Kraftrichtung in der Ebene AOB eine Involution und es stellt daher auch AB die Richtung der auf die Schnittfläche COF wirkenden Kraft dar; AB und diese Fläche sind somit im obigen Sinne einander conjugirt. Es folgt daher der Satz:

Fig. 15.



Dreht sich die Schnittfläche um eine Gerade, so bewegt sich die auf sie wirkende Kraft in der zu dieser Geraden conjugirten Ebene.

Legt man durch OC eine zu AB parallele Ebene, so bildet diese mit der Schnittebene COF einen involutorischen Ebenenbüschel, der von jeder beliebigen Ebene in involutorischen Strahlen geschnitten wird. Wir wählen nun drei ganz beliebige durch O gelegte Linien als Axen und bestimmen die drei zu diesen Axen conjugirten Ebenen;

dann wird jedem beliebigen neuen Strahl aus O eine vierte Ebene entsprechen, und die drei Ebenen, welche diesen Strahl mit den drei Axen verbinden, entsprechen den Linien, in welchen die vierte Ebene die drei Ausgangsebenen schneidet. Ueberdies sind in jeder dieser Ebenen die betreffende Schnittlinie und die Spur der ihr conjugirten Verbindungsebene involutorisch gepaart. Es folgt hieraus, dass die conjugirten Strahlen und Ebenen im Strahlenbüschel ein Polarsystem bilden.

Sind $a\,b\,c$ drei beliebige Strahlen eines Polarsystems und $A\,B\,C$ die ihnen entsprechenden Ebenen, so liegen bekanntlich die Schnittlinien $A\,B$, $B\,C$ und $C\,A$ zu $a\,b\,c$ perspectivisch, das heisst, die Ebenen $(A\,B)\,c$, $(B\,C)\,a$ und $(C\,A)\,b$ schneiden sich in einer Geraden s; ferner liegen die Schnittlinien $(a\,b)\,C$, $(b\,c)\,A$ und $(c\,a)\,B$ in der der Geraden s entsprechenden Ebene S. Hierdurch wird der auf der Seite 27 oben ausgesprochene Satz bestätigt.

Um zu untersuchen, wie sich die Spannungen der Grösse nach ändern, nehmen wir (Fig. 15) an beliebiger Stelle eine Ebene $O'\,C'\,G'$ an, die auf der Geraden $A\,B$ normal steht, und projiciren auf sie das Körperelement und das Kräftepolygon $O\,D\,E\,F$; dann fallen die Projectionen der Kräfte S_2 und S_1, da sie zur Ebene $A\,O\,B$ parallel laufen, in eine Gerade $D'\,F'$; ferner projicirt sich die Fläche $A\,B\,C$ als Linie $C'\,G'$ und diese ist gleich lang wie das aus dem Punkte C auf die Gerade $A\,B$ gefällte Perpendikel $C\,G$.

Lässt man nun wieder die Ebene $A\,B\,C$ um die Linie $A\,B$ sich drehen, so bleibt nach früher der Punkt D' fest und F' verschiebt sich parallel zu $O'\,G'$. Da nun die Kräfte S_2 und S_1 und somit auch ihre Mittelkraft der Länge von $O\,C$ proportional sind, so stehen in der Projection auch $D'\,F'$ und $O'\,C'$ in constantem Verhältnis. Wir haben somit in der Projection Beziehungen, die denjenigen der Figur 1 (S. 3) entsprechen, nur dass hier die τ gleich null sind; auf die Seite $O'\,G'$ wirkt die Kraft $O'\,D'$, auf die Seite $O'\,C'$ die Kraft $D'\,F'$; beide Kräfte sind den Seiten, auf die sie wirken proportional; dreht man daher die dritte Seite $G'\,C'$ um den Punkt G' und trägt auf dem Strahl $O'\,F'$ jeweilen die spezifische Spannung auf, die sich ergibt, wenn man die Kraft $O'\,F'$ durch die Länge $G'\,C'$ dividirt, so beschreibt der Endpunkt dieses Strahles wie in der Figur 4 (Seite 8) eine Ellipse. Da aber $G'\,C'$ dem Flächeninhalt des Dreieckes $A\,B\,C$ proportional und F' die Projection von F ist, so erhält man auch in der Ebene $O\,D\,F$ eine

Ellipse, wenn man die Kraft OF durch die Fläche ABC dividirt und den Quotienten auf dem Strahle OF aufträgt. Gibt man nun noch der Linie AB in der Ebene AOB verschiedene Richtungen, so ändert auch die Ebene ODF ihre Stellung; der Endpunkt der spezifischen Spannung wird aber jederzeit eine Ellipse beschreiben, und alle diese Ellipsen treffen sich auf der Kante OC, weil sie auf dieser die auf AOB wirkende spezifische Spannung abschneiden. Da endlich alle diese Ellipsen die Ebene AOB in einer Ellipse schneiden, weil für Schnittflächen parallel zu OC die spezifische Spannung in die Ebene AOB fällt und hier ganz den für Spannungen in der Ebene abgeleiteten Gesetzen folgt, so liegen sämtliche Ellipsen auf einem Ellipsoide, dem «Spannungsellipsoide».

Das Polarsystem der conjugirten Kräfte- und Schnittrichtungen ist nicht identisch mit demjenigen der conjugirten Durchmesser und Durchmesserebenen des Ellipsoides; beide Systeme haben jedoch gemeinschaftliche Axen und Hauptebenen. Denn in der Ebene $O'C'G'$ (Fig. 15) entsprechen nach früher senkrecht aufeinander stehenden Schnittrichtungen conjugirte Durchmesser der Ellipse; daraus folgt, dass auch zwei aufeinander senkrecht stehenden Schnittebenen conjugirte Durchmesser des Ellipsoides entsprechen. Sucht man nun im Polarsystem dasjenige Tripel conjugirter Ebenen, bei welchen die drei Ebenen rechte Winkel miteinander bilden, so bilden die zugehörigen Kräfte conjugirte Durchmesser des Ellipsoides; da aber diese Kräfte selbst aufeinander senkrecht stehen, so sind sie die Axen des Ellipsoides.

Das bis jetzt Entwickelte fassen wir nochmals zusammen und ergänzen es durch einige selbstverständliche Sätze aus den frühern Nummern:

Ist das Material in einem Punkte so in Anspruch genommen, dass sich die Inanspruchnahme ändert, wenn man in irgend einer Richtung fortschreitet, so bilden die Richtungslinien der Kräfte, welche auf ebene Schnitte durch diesen Punkt wirken, mit diesen Ebenen ein Polarsystem im Strahlenbündel.

Hat das Polarsystem keinen Ordnungskegel, so wird das Material nach allen Richtungen hin in gleicher Weise beansprucht, das heisst entweder gedrückt oder gezogen.

Hat das Polarsystem einen Ordnungskegel, so wird es im Innern des Kegels in entgegengesetzter Weise als ausserhalb desselben in Anspruch genommen. Für Schnitte, welche den Kegel berühren, fällt die Richtung der Kraft in die Schnittebene, das heisst das Material wird in solchen Fällen nur transversal beansprucht.

Trägt man von dem gegebenen Punkte aus die auf die verschiedenen Schnitte wirkenden spezifischen Spannungen in Richtung und Grösse auf, so liegen die Endpunkte aller dieser Spannungen auf einem Ellipsoide, dessen Axen mit dem des Polarsystems zusammenfallen.

Wird das Material in den drei Hauptschnitten in gleicher Weise in Anspruch genommen, so ist der Ordnungskegel des Polarsystems imaginär; haben die drei Hauptspannungen verschiedene Zeichen, so haben doch zwei derselben gleiches Zeichen und es liegen die diesen Spannungen entsprechenden Hauptschnitte innerhalb, der dritte ausserhalb des Ordnungskegels.

9. Construction des Spannungsellipsoides.

(Tafel 1.)

Wir wollen jetzt auf der Tafel 1 das Spannungsellipsoid auf Grund eines Tripels conjugirter Elemente wirklich construiren.

Es sei also ein Dreikant gegeben, dessen Kanten mit den Richtungen der auf die drei Seitenflächen wirkenden Kräfte zusammenfallen; dann sind die Kanten und Flächen dieses Dreikants nach früher im Polarsystem der Kräfte und Schnitte einander conjugirt. Die Grösse der drei Kräfte sei ebenfalls bekannt. Ausserdem sei eine vierte Ebene gegeben, und es sei von besonderem Interesse, die sie beanspruchende Kraft zu ermitteln. Endlich seien noch die Axen des Spannungsellipsoides, mit andern Worten die Richtungen und Grössen der Maximalinanspruchnahmen des Materials zu bestimmen.

In passender Entfernung r vom gegebenen Punkte (O) führen

wir eine Parallelebene zu der Ebene, für die man speziell die Inanspruchnahme des Materials zu kennen wünscht, und wählen diese Ebene zur Bildebene. Die Projection des gegebenen Punktes (O) sei O, und der Schnitt des gegebenen Dreikantes mit der Bildebene sei das Dreieck ABC.

Da bei der Lösung der uns gestellten Aufgabe vorzugsweise Strahlen und Ebenen des Bündels (O) vorkommen, so begnügen wir uns mit einer Orthogonalprojection der darzustellenden Gebilde. Irgend welche Punkte und irgend welche Linien sind durch ihre Projection und die Spuren der aus (O) sie projicirenden Strahlen, beziehungsweise Ebenen vollständig gegeben. Ebenso sind Figuren in solchen Ebenen, zum Beispiel die Schnitte von Durchmesserebenen mit dem Ellipsoide durch ihre Projectionen und die Spuren der Ebenen, in denen sie sich befinden, gegeben. Um die wahren Längen von Strahlen zu erhalten, braucht man sie blos um ihre Projectionen umzuklappen; es fällt dann die Höhe $O(O)$ mit dem zu der Projection senkrechten Radius des Distanzkreises k zusammen. Die wahre Grösse einer ebenen Figur erhält man durch Umklappung der Ebene um ihre Spur; dabei findet man die Lage des Punktes (O) in der umgeklappten Ebene einfach dadurch, dass man die Länge des Perpendikels von (O) auf die Spur bestimmt und auf der Projection des Perpendikels aufträgt; die Länge des Perpendikels findet man wie vorhin durch Umklappen. Auf der Tafel 1 sind auf diese Weise die Perpendikel $p_a\ p_b\ p_c$ von (O) auf die Dreikantseiten ABC construirt, die bezüglichen Constructionslinien indessen wieder ausgelöscht worden.

Es seien nun $\sigma_a\ \sigma_b\ \sigma_c$ die etwas stärker ausgezogenen Projectionen der von (O) aus in beliebigem Massstabe aufgetragenen spezifischen Spannungen, welche in den Kanten $(O)\ ABC$ auf die gegenüber liegenden Seiten wirken, und es soll zunächst diejenige Spannung ϱ bestimmt werden, welche auf die gegebene vierte (zur Bildfläche parallele) Ebene wirkt.

Zu diesem Zwecke hat man die gegebenen Spannungen mit den ihnen entsprechenden Flächen des Dreikantes zu multipliciren, die drei sich ergebenden Kräfte $S_a\ S_b\ S_c$ zusammenzusetzen und die Mittelkraft durch die Fläche ABC zu dividiren; zu demselben Resultate gelangt man jedoch auch, wenn man die Kräfte $S_a\ S_b\ S_c$ einzeln durch die Fläche ABC dividirt und die Quotienten, welche wir $\sigma_a'\ \sigma_b'\ \sigma_c'$ nennen wollen, vereinigt.

Um die Projection von σ_a' zu erhalten, beachten wir, dass die Flächen $(O)BC$ und ABC sich verhalten wie die Perpendikel von den Punkten (O) und A auf die gemeinschaftliche Basis BC. Den Perpendikel p_a von (O) auf BC haben wir bereits construirt; den Perpendikel p_a' von A auf BC greift man direct auf dem Blatt ab. Um daher die Projection der auf die Fläche $(O)BC$ wirkenden Kraft σ_a' zu finden, hat man σ_a mit dem Verhältnisse $p_a : p_a'$ dieser beiden Höhen zu multipliciren. Diese Arbeit ist für sämtliche drei Kräfte an passender Stelle ausgeführt, allein nicht ausgezogen worden; wir begnügen uns damit, zu sagen, dass die auf der Tafel in der Reihenfolge σ_c' σ_a' σ_b' aneinander gefügten Strecken die Ergebnisse dieser Verwandlungen sind.

Durch die Projection des Endpunktes R dieses Linienzuges allein ist dieser Punkt noch nicht vollständig bestimmt; wir müssen noch die Spur M des Strahles ermitteln, der ihn aus (O) projicirt. Nun schneidet der Strahl, welcher den Endpunkt von σ_a' aus (O) projicirt, die Bildfläche offenbar auf der Linie AC, also in M_b; denn σ_c' und σ_a' liegen in der Ebene $(O)AC$. Legt man nun durch (O) und σ_b' eine Hülfsebene, so geht deren Spur durch M_b und ausserdem, da σ_b' zu σ_b parallel ist, durch B. Der Schnittpunkt von OR mit BM_b ist daher der gesuchte Durchstosspunkt M. Hierdurch ist die Lage des Endpunktes von ϱ vollständig bestimmt und der erste Teil unserer Aufgabe gelöst.

In dem Polarsystem der Schnittflächen und Kräfte ist nun offenbar der Strahl $(O)M$ der zur Bildfläche parallelen Ebene conjugirt; in dem Polarsystem, welches der Bündel (O) auf der Bildebene ausschneidet, entspricht daher der Punkt M der unendlich fernen Geraden; das heisst, er ist der Mittelpunkt dieses Systems, und da ausserdem die Linien ABC ein Polardreieck bilden, so ist das Polarsystem vollständig bestimmt.

Da der Punkt M ausserhalb dieses Dreieckes liegt, so besitzt das Polarsystem eine reelle Ordnungskurve und der Bündel (O) einen Ordnungskegel, was übrigens schon daraus geschlossen werden konnte, dass die eine Spannung (σ_c) in entgegengesetztem Sinne wirkt wie die beiden anderen.

Die Ordnungskurve ist eine Hyperbel, und es lassen sich leicht zahlreiche Elemente derselben bestimmen. Dem Durchmesser BM entspricht der unendlich ferne Punkt von AC; der zu BM conjugirte Durchmesser läuft also parallel zu AC. Aus gleichen

Gründen sind die zu AB und BC parallelen Durchmesser den Durchmessern CM und AM conjugirt, und die drei Durchmesserpaare bilden eine Involution, deren Doppelstrahlen die Asymptoten der Hyperbel sind.

Auf der Geraden AC bilden ferner die Punkte A und C eine Involution, in welcher M_b dem unendlich fernen Punkte entspricht; schlägt man die Tangentenlänge aus M_b an einen durch A und C gelegten Kreis auf AC herunter, so erhält man die Doppelpunkte oder die zwei Schnittpunkte des Kegelschnittes mit AC. Die Verbindungslinien der Doppelpunkte mit B berühren die Kurve in diesen Punkten. Zieht man zur Tangente an einen dieser beiden Punkte eine Parallele durch den andern, so liefern je zwei auf dieser Parallelen liegende Punkte, die vom Doppelpunkte gleich viel abstehen, mit B verbunden zwei conjugirte Strahlen, welche auf AC zwei conjugirte Punkte ausschneiden.

Wie auf der Geraden AC, so entsteht auch auf der Geraden BC eine Involution. Der Mittelpunkt M_a derselben wird durch die Linie AM herausgeschnitten. Bei der Construction lag er noch auf dem Brett, so dass der eine Schnittpunkt der Hyperbel mit BC und die entsprechende durch A gehende Tangente erhalten werden konnten; der andere Doppelpunkt liegt weit ausserhalb des Blattes.

Der Schnittpunkt M_c von AB mit CM fällt zwischen A und B; die Involution auf AB hat demnach keine Doppelpunkte; ein Halbkreis über AB schneidet die Ordinate von M_c in dem mit J_c bezeichneten Punkte, von dem aus auf AB conjugirte Punkte durch die Schenkel jedes rechten Winkels bestimmt werden.

Mit Hülfe dieser Daten ist schliesslich die Hyperbel, so weit sie auf das Blatt zu liegen kommt, gezeichnet worden.

Jeder Ebene des Bündels (O), welche eine Linie der Bildebene projicirt, entspricht nun, als Richtungslinie der auf die Ebene wirkenden Kraft, derjenige Strahl, welcher den Pol dieser Linie projicirt. Die derart conjugirten Elemente können entweder mittelst der Ordnungskurve oder mittelst der drei Involutionen auf ABC construirt werden. (Letzteres muss immer dann geschehen, wenn keine reelle Ordnungskurve vorhanden ist.)

Die Bestimmung der Axen dieses Polarsystems ist eine Aufgabe dritten Grades, die sich nicht mehr vermittelst des Zirkels lösen lässt. Wir verfahren dabei genau so, wie es in Professor

Dr. Fiedler's «Darstellender Geometrie» (3. Aufl. Nr. 42: die Axen und Scheitel etc. der Flächen zweiten Grades) beschrieben und an einem Beispiel erläutert ist. Man bestimmt zu jedem Strahle der Ebene $(O)\,A\,B$ denjenigen conjugirten Strahl, der auf jenem senkrecht steht; der Ort aller dieser conjugirten Strahlen ist ein Kegel zweiter Ordnung, welcher die drei gesuchten Axen enthält; sie sind diejenigen Strahlen, welche den drei Schnittlinien der Ebene $(O)\,A\,B$ mit den Hauptebenen des Ellipsoides entsprechen. In gleicher Weise geben die Strahlen der Ebene $(O)\,A\,C$ einen Kegel, der ebenfalls die Axen enthält. Die beiden Kegel schneiden sich in vier Mantellinien; die eine von diesen ist derjenige Strahl, welcher der gemeinschaftlichen Linie $(O)\,A$ conjugirt ist; die drei übrigen sind die gesuchten Axen. Diese hier angedeuteten Operationen wurden auf der Tafel wie folgt ausgeführt.

Der Kegel, welcher der Ebene $(O)\,A\,B$ entspricht, schneide in der Bildebene die Kurve u heraus; die Spur des der Ebene $(O)AC$ entsprechenden Kegels sei v. Um zu einem beliebigen Strahle der Ebene $(O)\,A\,B$ den conjugirten zu finden, lege man durch (O) zwei Ebenen, von denen die eine zu dem angenommenen Strahl conjugirt ist, die andere auf demselben senkrecht steht; die Schnittlinie der beiden Ebenen ist der gesuchte Strahl und der Schnittpunkt ihrer Spuren der Durchstosspunkt desselben. Da die Ebene $(O)\,A\,B$ zur Geraden $(O)\,C$ conjugirt ist, so geht die zum angenommenen Strahle conjugirte Ebene stets durch $(O)\,C$ und ihre Spur durch C; ferner geht die auf dem Strahle senkrecht stehende Ebene durch den in (O) auf $(O)\,A\,B$ errichteten Perpendikel, und die Spur derselben dreht sich um den Durchstosspunkt U dieses Perpendikels. Den Punkt U findet man, indem man durch O eine Senkrechte zu $A\,B$ und durch den Endpunkt des umgeklappten Perpendikels p_c eine Senkrechte zu diesem zieht. Dreht sich nun der Strahl in der Ebene $(O)\,A\,B$ um (O), so bewegen sich die beiden genannten Ebenen um $(O)\,C$ bezw. $(O)\,U$ und beschreiben hierbei Büschel, welche zu dem in $(O)\,A\,B$ liegenden Büschel projectivisch sind; der Ort ihrer Schnittlinie ist daher, wie oben behauptet wurde, ein Kegel zweiter Ordnung und seine Spur u, das heisst die von den Strahlenbüscheln C und U beschriebene Kurve ein Kegelschnitt. Dasselbe gilt von der Ebene $(O)\,A\,C$ und der Kurve v; letztere ist wiederum der Schnitt zweier projectivischer Strahlenbüschel, von denen der eine sein Centrum in B hat, während dasjenige des anderen, V, gefun-

den wird, wenn man durch (O) einen Perpendikel auf die Ebene $(O)AC$ legt.

Nun lassen sich leicht für jeden der beiden Kegelschnitte sechs Punkte angeben. Die Kurve u geht nämlich durch die beiden Punkte C und U und durch vier weitere Punkte, welche man erhält, wenn man den Strahl der Ebene $(O)AB$ der Reihe nach durch A, B, M_c und den unendlich fernen Punkt von AB führt. Dem Strahle $(O)A$ entsprechen in der Bildebene die Strahlen CB und der auf OA senkrechte Strahl aus U; denn ersterer liegt in der zu $(O)A$ conjugirten Ebene, letzterer in der zu $(O)A$ normalen Ebene durch (O). Die beiden Strahlen treffen sich in dem mit (uv) bezeichneten Punkte, welcher, da er dem gemeinschaftlichen Strahle der Ebenen $(O)AB$ und $(O)AC$ entspricht, zugleich auch der Kurve v angehört. Dem Strahle $(O)B$ sodann entsprechen die Linie CA und die aus U auf OB gezogene Senkrechte; ihr Schnittpunkt trägt den Buchstaben u_b. In derselben Weise führt der Strahl $(O)M_c$ zu dem Punkte u_m; letzterer ist, da dem Punkte M_c auf AB der unendlich ferne entspricht, der Schnitt einer Parallelen zu AB durch C und einer Senkrechten durch U zu OM_c. Endlich gelangt man, indem man den Strahl aus (O) parallell zu AB laufen lässt, zu dem Punkte u_∞.

Für den Kegelschnitt v erhält man genau nach demselben Vorgange, indem man den Strahl aus (O) durch A, C, M_b und den unendlich fernen Punkt von AC gehen lässt, der Reihe nach die Punkte (uv), v_c, v_m und v_∞, welche mit B und V die Kurve v vollständig bestimmen. (Von diesen Punkten fiel v_∞ ausserhalb des Blattes.)

Jedes Paar conjugirter Punkte auf AB beziehungsweise AC gibt zwei weitere Kurvenpunkte; doch ist es vortheilhafter, die bisher bestimmten Punkte, welche meistens auf Linien liegen, die durch die Aufgabe selbst in grosser Länge gegeben sind, dazu zu benützen, die Kegelschnitte mittelst projectivischer Punktreihen zu ergänzen.

Die Kurven u und v sind auf der Tafel gestricht ausgezogen; erstere ist eine Ellipse, letztere eine Hyperbel. Beide haben, wie schon früher bemerkt wurde, den Punkt (uv) gemein; ausserdem schneiden sie sich noch in drei weiteren Punkten $X\ Y\ Z$, welche nach früher die Spuren der Axen des Polarsystems sowie des Spannungsellipsoides sind. Diese drei Punkte zu bestimmen, ist eine

Aufgabe dritten Grades, welche man am besten durch Probiren löst; man zeichnet nämlich in der Nähe der gesuchten Punkte kurze Strecken der beiden Kurven mit möglichster Genauigkeit, am einfachsten vermittelst projectivischer Strahlen, und bestimmt auf diese Weise die Lage der Schnittpunkte. Von den drei Axen bezeichnen wir diejenige, welche innerhalb der Ordnungskurve liegt mit $(O) Z$; es werden daher XZ und YZ von der Ordnungshyperbel geschnitten, XY dagegen nicht. O muss der Schnittpunkt der Höhenperpendikel des Dreieckes XYZ sein.

Die Ordnungskurve erzeugt nun auch in jeder Seite des Dreieckes XYZ eine Involution. Auf der Seite XY sind zunächst X und Y einander conjugirt; vier weitere Punktepaare erhält man, wenn man die Verbindungslinien der Punkte $A\,B\,C\,M$ mit Z, sowie die Polaren dieser Punkte mit XY zum Schnitte bringt. Insbesondere schneidet MZ auf XY den Mittelpunkt M_z der Involution aus; senkrecht über diesem Mittelpunkte, in J_z schneiden sich alle Halbkreise, welche über zwei conjugirten Punkten beschrieben werden.

In gleicher Weise können die Involutionen mit Doppelpunkten in den beiden übrigen Seiten XZ und YZ construirt werden. Die Doppelpunkte D_y und D_x sind die Schnitte dieser Seiten mit der Ordnungskurve; die Tangenten an diese Schnittpunkte gehen durch Y bezw. X.

Um sodann die Hauptschnitte des Spannungsellipsoides zu erhalten, klappen wir die Ebenen $(O) XY$, $(O) YZ$ und $(O) ZX$ in die Bildfläche nieder, wobei der Punkt (O) beziehungsweise nach $O_z\, O_x\, O_y$ fällt. Die Verbindungslinien dieser Punkte mit X, Y, Z sind die Axen der Schnittellipsen, die Verbindungslinien mit den Doppelpunkten D_y und D_x die Ordnungsstrahlen der Involution der Schnitte und Kräfte.

Es handelt sich nun darum, die Längen der Hauptaxen des Ellipsoides, mit anderen Worten die Maximal- und Minimalwerte der Normalspannung σ zu finden. Wir nennen die drei Halbaxen $\sigma_x\, \sigma_y\, \sigma_z$. Um diese Grössen zu bestimmen, haben wir zunächst die eine derselben, σ_z, willkürlich angenommen und von O_x aus gegen Z hin aufgetragen. Errichtet man dann am Endpunkt dieser Strecke ein Perpendikel bis zu dessen Schnittpunkt mit dem Ordnungsstrahl $O_x\, D_x$ und legt durch diesen Schnittpunkt und O_x einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf $O_x Z$ liegt, so entsteht eine, der Figur 12 (S. 21) analoge Construction, und man ersieht sofort, dass die

Strecke, welche σ_z zum Durchmesser ergänzt, gleich σ_y sein muss. Dieselbe Operation auf $O_y Z$ ausgeführt (die Linien sind hier nicht ausgezogen) führt zu σ_x. Mittelst dieser drei Halbaxen können nun die Ellipsen (abgesehen von der zunächst noch willkürlichen Wahl von σ_z) in den umgeklappten Ebenen leicht gezeichnet werden.

In der umgeklappten Ebene $(O)XY$ haben die beiden σ gleiches Zeichen; der Kreis der Figur 12 (oder entsprechender der Fig. 10, S. 16) hat daher hier die Differenz derselben zum Durchmesser. Er ist infolge dessen so klein ausgefallen, dass er mehr zur Uebersicht der Verhältnisse dient und nur vorsichtig zum Construiren benützt werden darf. Dem Punkte U der Figur 10 entspricht hier der Punkt U_z; die Polare desselben geht durch den Punkt J, das Involutionscentrum der conjugirten Schnitte und Kräfte. Nach Figur 2 (Seite 5) sind hier auch die beiden (gestrichten) Strahlen aus O_z bestimmt worden, welche zu den die Axenwinkel halbirenden Strahlen conjugirt sind; sie bilden die Diagonalen in dem der Ellipse umschriebenen Axenrechteck.

Mittelst der Axenlängen können wir nun die Länge irgend eines Strahles von (O) bestimmen. Wir führen diese Bestimmung vor allem für die drei Strahlen σ_a σ_b σ_c aus. Zu diesem Zwecke klappen wir die Ebene $(O)BZ$, welche σ_b aus Z projicirt, in die Bildfläche um; dabei gelangt (O) nach O_{bz}. Der Schnitt der Ebene mit dem Ellipsoide ist eine Ellipse, deren eine Axe nach Z, und deren andere nach Z_b, dem Schnitte von BZ mit XY, gerichtet ist; die Länge der nach Z gerichteten Halbaxe ist σ_z, diejenige der andern, σ_{bz}, findet man, wenn man Z_b mit O_z verbindet und den entsprechenden Radius der Ellipse O_z bestimmt, was mittelst zweier Kreise über den Axen σ_x und σ_y geschehen kann, ohne dass die Ellipse selbst gezeichnet zu werden braucht. In gleicher Weise wird sodann die Strecke σ_b bestimmt, welche die Ellipse O_{bz} auf dem nach B gerichteten Strahle abschneidet. Die Strecken σ_{bz} und σ_b sind von O_{bz} aus aufgetragen, die zu ihrer Ermittlung verwendeten Hülfslinien dagegen wieder ausgelöscht worden.

Ganz auf demselben Wege wurden hierauf die Spannungen σ_a und σ_c construirt, erstere durch Umklappen der Ebene $(O)AY$, letztere durch Umlegen der Ebene $(O)CY$; die Punkte O_{ay} und O_{cy} sind, um das Nachzeichnen zu erleichtern, aufgetragen, die betreffenden Linien jedoch wieder ausgelöscht worden.

Wurde genau und richtig gearbeitet, so werden nun die so

erhaltenen σ_a σ_b σ_c wegen der willkürlichen Annahme von σ_z zwar nicht gleich, wohl aber proportional den ursprünglichen, durch ihre Projection gegebenen Werten sein. Projicirt man jene normal zur Umlegaxe zurück, so wird man auf den Strahlen $O)ABC$ drei Punkte erhalten, deren Verbindungslinien parallel laufen müssen zu den Verbindungslinien der Endpunkte der gegebenen σ_a σ_b σ_c. Trifft dieses zu, so kann man nun die willkürlich angenommenen Werte σ_x σ_y σ_z auf die Strahlen $O)\ XYZ$ projiciren und durch Parallellinien ihre wahren Längen bestimmen. Da dieser Vorgang leicht zu überblicken ist, so haben wir, um nicht allzu viel Linien zu erhalten, die auf der willkürlichen Annahme von σ_z beruhenden Constructionen ausgelöscht und nur die mit den richtigen Werten σ_x σ_y σ_z ausgeführten ausgezogen.

In jedem der drei umgeklappten Hauptschnitte $(O)XYZ$ ergibt sich nun eine Ellipse als Schnittfigur der Ebene mit dem Ellipsoide.

Von den drei Hauptspannungen ist, absolut genommen, σ_z die grösste und σ_y die kleinste; erstere wirkt jedoch, da sie ins Innere des Ordnungskegels fällt, in entgegengesetztem Sinne wie die beiden anderen. —

Mit den vorstehend beschriebenen Operationen kann unsere Aufgabe der Hauptsache nach als erledigt angesehen werden. Die gefundenen Resultate setzen uns in den Stand, für jede gegebene Schnittrichtung die Richtung und Grösse der zugehörenden Spannung zu finden und umgekehrt. Die Spur der Schnittebene und der Durchstosspunkt der entsprechenden Kraft liegen stets polar hinsichtlich der Ordnungskurve und die Länge jedes Strahles aus (O) wird durch Umlegen einer geeigneten Hülfsebene erhalten. Um jedoch die Verhältnisse noch etwas klarer und vollständiger darzustellen, sind noch das Ellipsoid selbst und dessen Schnitte mit dem Dreikant $(O)XYZ$, sowie einige andere Elemente gezeichnet worden.

Der das Ellipsoid projicirende Cylinder berührt es in derjenigen Durchmesserebene, welche zu dem auf der Bildfläche senkrechten Durchmesser $(O)\,O$ conjugirt ist. Die Spur e dieser Diametralebene finden wir folgendermassen: Wir legen durch $(O)OX$ eine Hülfsebene und bestimmen den zu ihr conjugirten Strahl e_x; dieser muss, da er zu $(O)\,X$ conjugirt ist, in dem Hauptschnitte $(O)\,YZ$, und da er zu $(O)\,O$ conjugirt ist, in der gesuchten Durchmesserebene liegen, somit die Bildfläche in der Geraden e treffen. Verbindet man den Punkt

F_x, in welchem die Linien XO und YZ sich schneiden, mit O_x und bestimmt in der Ellipse O_x den zu dieser Verbindungslinie conjugirten Durchmesser, so ist dieser nichts anderes, als der umgeklappte Strahl e_x; sein Schnitt mit der Ellipse ist durch einen kurzen Strich und den Buchstaben e_x' angedeutet; der Punkt E_x, in welchem er die Gerade YZ trifft, ist sein Durchstosspunkt, also ein Punkt der Spur e. Verbindet man E_x mit O und projicirt den Punkt e_x' rückwärts, so erhält man den einen Endpunkt des Durchmessers e_x; der andere liegt in gleicher Entfernung von O auf der entgegengesetzten Seite. Durch diese Endpunkte geht die das Ellipsoid darstellende Kurve, und die zu OX parallelen Strahlen bilden zugleich deren Tangenten.

Die Punkte F_x und E_x sind hinsichtlich der Ellipse O_x einander conjugirt; ein Halbkreis über $F_x E_x$ und einer über YZ schneiden sich im Punkte J_x', aus welchem je zwei conjugirte Punkte der Geraden YZ unter einem rechten Winkel projicirt werden. Der Fusspunkt M_x' des Perpendikels aus J_x' ist der Mittelpunkt der Involution, welche die conjugirten Ellipsendurchmesser herausschneiden.

Auf dem nämlichen Wege sind hierauf auch die Strahlen e_y und e_z construirt worden, welche den Ebenen $(O)OY$ und $(O)OZ$ conjugirt sind. (Der Punkt E_y liegt ausserhalb des Blattrandes.) Ganz gleich wie vorhin ergeben sich hierbei je zwei weitere Punkte der Projectionsellipse und deren Tangenten, sowie die Punkte J_y' und J_z' und auf den Linien XZ und XY die Mittelpunkte M_y' und M_z' der Involutionen conjugirter Ellipsendurchmesser. Die Projection des Ellipsoides konnte hiernach leicht gezeichnet werden.

Die soeben besprochenen Involutionen, welche die Durchmesser der Hauptellipsen auf den Seiten des Dreieckes XYZ herausschneiden, sind bekanntlich mit denjenigen der conjugirten Schnitte und Kräfte nicht identisch. Deshalb haben wir für XY zwei verschiedene Mittelpunkte M_z und M_z' und ebenso zwei verschiedene Punkte J_z und J_z' erhalten.

Da jeder der Strahlen e_x e_y e_z in einer Hauptebene des Ellipsoides liegt, so gehen die Hauptschnittkurven ebenfalls durch deren Endpunkte und berühren daselbst zugleich die schon früher gezeichneten Tangenten. Da die drei Kurven überdies durch je zwei der Endpunkte von σ_x σ_y σ_z gehen, so unterliegt auch ihre Construction keiner Schwierigkeit.

Gleichwie die Ellipsen, in welchen das Ellipsoid von den Haupt-

ebenen geschnitten wird, könnten auch die Schnittkurven mit dem Dreikant $(O) A B C$ dargestellt werden. Bringt man die Seiten des Dreiecks $A B C$ mit e zum Schnitt und projicirt die Schnittpunkte aus O, so erhält man auf der Projection des Ellipsoides die Punkte, in welchen letztere von jenen Kurven berührt wird; die gemeinschaftlichen Tangenten können leicht construirt werden und die Endpunkte von σ_a σ_b σ_c bestimmen alles weitere. Um das Blatt nicht zu überladen, sind indessen diese Kurven nicht eingezeichnet worden.

Um beliebige Ebenen durch $(O) O$ leicht umlegen zu können, ist es zweckmässig, vorerst die Länge des in dieser Linie liegenden Ellipsoidenstrahles zu ermitteln. Wir erhalten sie durch Umlegen der Ebene $(O) O Z$; der Punkt (O) kommt hierbei nach O_0 zu liegen; die eine Halbaxe der Schnittellipse ist σ_z; die andere wird erhalten, wenn man $Z O$ mit $X Y$ zum Schnitt bringt und den nach dem Schnittpunkte gerichteten Radius der Ellipse O_z bestimmt; vermittelst dieser beiden Werte kann der durch O gehende Radius der umgelegten Ellipse leicht construirt werden. Er ist von O_0 aus nach unten hin aufgetragen und mit σ_0 bezeichnet worden.

In allen Schnitten durch $(O) O$ ist dieser Strahl dem in der Ebene $(O) e$ liegenden conjugirt, und das Zeichnen der Schnittellipsen kann daher ohne Zuhülfenahme der Hauptschnitte vorgenommen werden. Wir wollen noch zeigen, wie man nach diesem kürzeren Verfahren diejenige Ebene umklappt, welche den der Bildebene conjugirten Durchmesser, also den höchsten und tiefsten Punkt des Ellipsoides bezüglich der Bildfläche enthält.

Der Durchstosspunkt M' dieses Durchmessers ist in dem durch das Ellipsoid erzeugten Polarsystem der unendlich fernen Geraden conjugirt, somit der Schnittpunkt der Geraden $X M_x'$, $Y M_y'$, $Z M_z'$. Klappt man nun die durch $(O) O M'$ gelegte Ebene um, so fällt (O) nach O_m; die Hülfsebene schneidet die Gerade e im Punkte E_m; dann sind $O_m O$ und $O_m E_m$ conjugirte Durchmesser der Schnittellipse; trägt man nun von O_m aus in der Richtung nach O die Strecke σ_0 auf und legt durch den Punkt, in welchem $O E_m$ die Projection des Ellipsoides schneidet, eine Parallele zu $O O_m$, so erhält man die bezüglichen Kurvenpunkte und kann die Ellipse einzeichnen. Hierauf lässt sich leicht derjenige Punkt bestimmen, der von $O E_m$ am weitesten absteht, und durch Zurückklappen findet man den Punkt T, in welchem das Ellipsoid von einer zur Bildfläche parallelen

Ebene berührt wird. Der höchste Punkt T' desselben befindet sich in gleicher Entfernung von O auf der gegenüberliegenden Seite.

Der Punkt M' ist zugleich der Mittelpunkt derjenigen Kurve, in welcher das Ellipsoid von der Bildebene geschnitten wird. Da die Punkte, in welchen die Linien XY, XZ und OM' die ihnen entsprechenden Schnittellipsen treffen, dieser Kurve angehören, so ist auch sie vollständig bestimmt.

Es bleibt jetzt nur noch übrig, die Durchdringungskurve des Ordnungskegels und des Ellipsoides zu zeichnen, welche bekanntlich eine Raumkurve vierter Ordnung ist.

Da beide Flächen innerhalb der acht, durch die Hauptschnitte gebildeten Dreikante in ebenso viele, vollkommen gleiche, congruente oder symmetrische Teile zerfallen, so muss auch die Durchdringungskurve aus acht solchen Stücken bestehen; in Folge dieser Congruenz und Symmetrie wird sie daher aus dem unendlich fernen Punkte jeder Axe so auf den conjugirten Hauptschnitt projicirt, dass auf jedem Projectionsstrahle zwei Kurvenpunkte liegen. In diesem Falle ist aber der Projectionskegel (hier Projectionscylinder) ein Kegel zweiter Ordnung; die Projectionen d_x d_y d_z der Durchdringungskurve auf die Hauptschnitte sind daher Kegelschnitte. Ueberdies fallen die Axen dieser Kegelschnitte infolge der hervorgehobenen Symmetrie mit denjenigen der Hauptschnittellipsen zusammen.

Da die Spitze des Ordnungskegels im Innern des Ellipsoides liegt, so zerfällt die Durchdringungskurve in zwei getrennte, doppelt gekrümmte Ringe, durch deren Mitte die Axe OZ geht. Diese Ringe projiciren sich auf die XY-Ebene als ganze Ellipse d_z; die Halbaxen derselben können in den umgelegten Ebenen $(O)XZ$ und $(O)YZ$ direct abgegriffen werden; sie sind gleich den Abscissen der Punkte, in welchen die Hauptellipsen von den Doppelstrahlen ($O_y D_y$ beziehungsweise $O_x D_x$) geschnitten werden. Die Projection d_x auf die YZ-Ebene besteht aus zwei Ellipsenstücken, welche durch die oben genannten Schnittpunkte begrenzt werden; ihre Halbaxe auf der z-Axe wird in der Ebene O_y als Ordinate des dortigen Schnittpunktes abgegriffen. Auf gleiche Weise findet man entsprechende Punkte in der ZX-Ebene, woselbst die Projection aus zwei Hyperbelstücken besteht.

Ziemlich rasch kann nun die Projection der Durchdringungskurve selbst gezeichnet werden. Den vier Axenendpunkten der Ellipse d_z entsprechen acht Punkte derselben, welche paarweise auf

Strahlen durch O liegen; ihre Tangenten laufen mit σ_x oder σ_y parallel. Schreibt man ferner dieser Ellipse ein beliebiges Rechteck ein, dessen Seiten den Axen parallel laufen, so entsprechen den vier Ecken acht Punkte der Kurve, welche zusammen ein rechtwinkliges Parallelopiped bilden; die Kanten desselben bilden in der Projection drei mal vier Parallellinien zu den drei Hauptaxen. Die Strahlen aus O sodann, welche die Schnittpunkte der Linie e mit der Ordnungskurve projiciren, bestimmen auf der Projection des Ellipsoides die vier Stellen, in welchen diese von der Durchdringungskurve berührt wird. Die Tangenten aus O an die Ordnungskurve sind zugleich auch Tangenten an die Durchdringungskurve.

Um endlich im Allgemeinen einen Punkt dieser Kurve auf irgend einem Strahle des Ordnungskegels zu erhalten, der durch seine Spur auf der Hyperbel gegeben ist, hat man die gegebene Spur aus den Ecken des Dreiecks XYZ auf die gegenüberliegenden Seiten zu projiciren und die erhaltenen Punkte mit O_{xyz} zu verbinden; dann sind diese Verbindungslinien die Projectionen des gegebenen Strahles auf die Hauptebenen und schneiden daher auf den Projectionen d_{xyz} der Durchdringungskurve den gesuchten Punkt aus.

Auf der Tafel sind indessen diese letzteren Constructionen nicht mehr zur Darstellung gebracht worden, weil die Zeichnung schon ohnedies allzu viele Linien besitzt.

10. Verschiedene Bestimmungsweisen des Polarsystems. Zug- und Druckkurven in Körpern.

In der vorigen Nummer haben wir angenommen, es sei ein Dreikant gegeben, dessen Kanten den gegenüber liegenden Seiten conjugirt sind, und haben daraufhin das Polarsystem der Schnitte und Kräfte, die Axenrichtungen und das Spannungsellipsoid abgeleitet. In diesem Falle können die in den drei Kanten wirkenden Kräfte ganz beliebige Werte haben und das Polarsystem wird erst durch Zusammensetzung dieser Kräfte bestimmt. Allein so bietet sich der Fall in der Praxis nicht leicht dar, sondern es werden in der Regel beliebige Schnitte und die dazu gehörigen Kräfte gegeben sein. Es handelt sich nun noch darum, wie auch in diesem Falle das Spannungsellipsoid construirt, mit anderen Worten, auf welche

Weise die verschiedenen möglichen Fälle auf den auf der Tafel 1 behandelten zurückgeführt werden können.

Wir schicken voraus, dass durch das Polarsystem der Schnitte und Kräfte auch die Richtungen und das Verhältnis der Axen im Spannungsellipsoid gegeben sind; denn da senkrecht aufeinander stehenden Schnittflächen conjugirte Durchmesser des Ellipsoides entsprechen, ist durch das Polarsystem der Schnitte und Kräfte auch dasjenige des Ellipsoides bestimmt; die Hauptaxen fallen in beiden Systemen bekanntlich zusammen. Wird daher noch die Grösse einer einzigen Kraft gegeben oder angenommen, so ist das Spannungsellipsoid vollständig bestimmt.

Wenn nun drei beliebige Ebenen als Schnitte gegeben sind, so besteht zwischen den zugehörigen Kräften eine gewisse Abhängigkeit. Nach der Nummer 8, Seite 26, müssen nämlich, wenn die Kräfte parallel zu den Schnittlinien der drei Ebenen zerlegt werden, je zwei Componenten, die sich auf einer Kante schneiden, sich zueinander umgekehrt verhalten wie die Sinusse der entsprechenden Kantenwinkel.

Damit identisch ist die Forderung der Geometrie, dass das Dreikant der Ebenen und das der Kräfte perspectivisch liegen. (Vgl. S. 29.) Sind $A\ B\ C$ die drei Ebenen und $a\ b\ c$ die Kraftrichtungen, so müssen sich die Ebenen $a(BC)$, $b(CA)$ und $c(AB)$ in einer Geraden s des Bündels schneiden, oder, was dasselbe bedeutet, es müssen die Schnittlinien $A(bc)$, $B(ca)$ und $C(ab)$ in einer Ebene S liegen. Es können daher nur die Richtungen von a und b ganz willkürlich angenommen werden, die dritte Linie c ist an die Ebene $s(AB)$ gebunden. Wählt man sie in dieser Ebene, so ist das Polarsystem durch die Paare Aa, Bb, Cc und Ss bestimmt und es können der Mittelpunkt desselben, die Ordnungskurve und die Hauptaxen ähnlich wie in der vorigen Nummer construirt werden. Wird noch die Grösse irgend einer Kraft angegeben, so ergibt sich auch das Spannungsellipsoid.

Der hiemit besprochene Fall dürfte in der Praxis am häufigsten vorkommen. Bequemer liegen die Verhältnisse, wenn zwei Ebenen A, B und die Richtungen a, b gegeben sind und die auf die Ebene $(ab) = C$ wirkende Kraft in der Linie $AB = c$ liegt; denn dann ist in der Ebene C der Strahl a mit der Spur von A, sowie der Strahl b mit der Spur von B involutorisch gepaart, und man gelangt somit ohne weiteres auf ein Poldreikant. Die Grössen der drei in $a\ b\ c$

wirkenden Kräfte sind hierbei voneinander ganz unabhängig. Ist überhaupt auf die eben angegebene oder auf irgend eine andere Weise die Involution der Schnitte und Kräfte in einer Ebene des Bündels und die auf diese Ebene wirkende Kraft bekannt, so braucht man nur noch zu einer beliebigen zweiten Ebene die entsprechende Kraft zu kennen, um alles fest zu legen; dabei müssen jedoch in der ersten Ebene die Spur der zweiten und die Spur der die beiden Kräfte enthaltenden Ebene einander conjugirt sein.

Von dem Satze, dass ein Polarsystem auch durch ein Fünfkant gegeben sein kann, in welchem jede Kante der gegenüberliegenden Seite zugeordnet ist, wird man in der Statik der inneren Kräfte wohl nie Gebrauch zu machen haben. —

Wären für alle Punkte eines Körpers die Polarsysteme der Schnitte und Kräfte bekannt, so könnte man in ähnlicher Weise, wie es in der Nummer 7, Seite 22, für die Ebene angedeutet ist, auch das Wirken der Kräfte im Innern von Körpern darstellen. Für irgend einen Punkt seien die drei Axenrichtungen bestimmt worden; dann kann man in jeder der drei Richtungen zu einem benachbarten Punkte übergehen und für diesen dieselbe Bestimmung ausführen, und in dieser Weise weiter fahren. Von Punkt zu Punkt werden sich die Richtungen langsam ändern, und man erkennt leicht, dass man auf diesem Wege im Innern des Körpers drei, im Allgemeinen doppelt gekrümmte Linien oder Trajectorien erhält. Beginnt man die Construction dieser Linien in den zweimal unendlich vielen Punkten, welche einen beliebigen Querschnitt eines Körpers füllen, so bekommt man für jeden derselben drei Trajectorien, im Ganzen also drei Systeme von zweimal unendlich vielen Linien, von denen jedes den ganzen Raum ausfüllt. Wo zwei Linien verschiedener Systeme sich schneiden, bilden sie miteinander einen rechten Winkel. Die unendlich kleine Fläche, welche in diesem Schnittpunkte die sich schneidenden Linien berührt, erfährt nur normale und keine transversalen Spannungen.

Leider ist diese Darstellung im Allgemeinen praktisch unausführbar. Die Zeichnung der vorigen Nummer hat grosse Mühe und verhältnismässig viel Zeit gekostet, kostet auch dann noch viel Zeit, wenn man sich auf die Bestimmung der Axenrichtungen beschränkt; diese Bestimmung für etwa hundert Punkte, was sehr wenig wäre, auszuführen, ist eine Arbeit, welche die Kräfte und die Zeit, die auf irgend ein Projekt verwendet werden können, weit über-

steigt. Nur in einzelnen speziellen Fällen, wo von den 9 Componenten der Figur 14 mehrere gleich null werden, und die Trajectorien infolge dessen gewissen einfacheren Gesetzen folgen, mag es gelingen, dieselben für ein Beispiel zur graphischen Darstellung zu bringen. Wenn sich speziell für jeden Punkt des Körpers ein Schnitt angeben lässt, für welchen die Kraft gleich null wird, so gehen die Spannungsellipsoide in ebene Ellipsen über, und die Trajectorien lassen sich in diesem Falle mit Hülfe der für die Ebene abgeleiteten Methoden und Regeln bestimmen. Wir werden in der Nummer 26 einen solchen Fall behandeln. Im Uebrigen wird man sich, wenn überhaupt etwas geschehen soll, darauf beschränken, von den räumlichen Verhältnissen einfach Abstand zu nehmen und die Zug- und Druckkurven in ausgezeichneten ebenen Schnitten zu construiren.

Zweites Kapitel.

Gleichgewicht zwischen äusseren und inneren Kräften.

11. Die an einem Balken wirkenden Kräfte im Allgemeinen.

Während die im vorigen Kapitel abgeleiteten Gesetze allgemeine Gültigkeit besitzen, werden wir in der Folge, die Bedürfnisse des Bauwesens besonders berücksichtigend, uns speziell mit stab- oder balkenförmigen Körpern beschäftigen.

Unter einem Balken oder Träger denken wir uns einen stabförmigen Körper, der durch die Bewegung einer ebenen Figur in der Art erzeugt wird, dass der Schwerpunkt der Figur eine continuirliche Bahn beschreibt, während die Figur selbst auf dieser Bahn beständig normal steht. Die Bahn des Schwerpunktes nennen wir die Axe des Balkens und die sich bewegende Figur die Querschnittsfläche oder kurz den «Schnitt» des Balkens.

Die Axe braucht nicht notwendig eine gerade Linie zu sein; doch sind scharfe Krümmungen und Ecken im Allgemeinen ausgeschlossen, so dass zwei benachbarte Schnitte noch als parallel angesehen werden können. Ebenso braucht die Figur nicht constant zu sein; doch wird vorausgesetzt, dass sie sich im Verhältnis zu ihrer Ausdehnung nicht wesentlich ändere, so dass jedem Elemente des einen Schnittes ein annähernd gleich grosses und gleich gelegenes des benachbarten Schnittes zugewiesen werden kann. Ferner wird angenommen, dass die Länge der Axe in der Regel mindestens drei- bis viermal so gross sei als die grösste Dimension des Schnittes und dass der erzeugende Schnitt denselben körperlichen Raum nicht wiederholt beschreibe.

Die Bestimmung des Balkens besteht darin, Kräfte zu übertragen. Der über einen Bach gelegte Balken zum Beispiel überträgt die Last eines auf ihm stehenden Wagens auf die an den Ufern gelegenen Stützpunkte oder Widerlager. Man kann das Gewicht des Wagens in zwei Seitenkräfte zerlegen, die durch die Widerlager gehen und dort durch die Gegendrücke dieser letzteren aufgehoben werden, so dass diese Gegendrücke oder Reactionen mit dem Gewichte des Wagens im Gleichgewicht stehen. Der Zusammenhang dieser drei Kräfte wird durch den Balken vermittelt, und dabei entstehen, wie schon am Beginn des vorigen Kapitels auseinandergesetzt wurde, in dem Balken sogenannte innere Spannungen. Teilt man den Balken durch einen wirklichen Schnitt in zwei Teile, so hören dadurch die inneren Kräfte in diesem Schnitte zu wirken auf; die Uebertragung der Last auf die beiden Widerlager wird gestört und jeder der beiden Balkenteile müsste unter dem Einfluss der an ihm wirkenden, nicht mehr im Gleichgewicht befindlichen Kräfte in Bewegung geraten. Soll der Balken in seiner ruhigen Lage verharren, so müssen daher nicht nur die sämtlichen äusseren Kräfte sich das Gleichgewicht halten, sondern es müssen auch in jedem Querschnitte innere Kräfte wirksam sein, die sowohl mit den links, als auch mit den rechts vom Schnitte angreifenden äusseren Kräften im Gleichgewicht stehen.

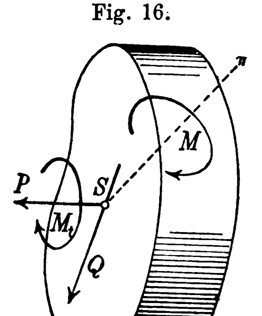
Aus dieser Ueberlegung folgt, dass die Mittelkraft der ausserhalb eines Querschnittes angreifenden äusseren Kräfte stets gleich und entgegengesetzt den in diesem Schnitte wirkenden inneren Kräften sein muss; den Zusammenhang der äusseren und inneren Kräfte, die Verteilung der genannten Mittelkraft über den Quer-

schnitt zu untersuchen, ist der Zweck dieses zweiten Kapitels. Wir beschränken uns hierbei darauf, die Grösse dieser inneren Kräfte zu bestimmen, ohne auf die Frage einzutreten, ob diese Kräfte zu gross seien oder nicht, das heisst ohne zu prüfen, ob das Material sie ohne Gefahr oder Nachteil auszuhalten im Stande sei oder nicht.

12. Die Verteilung der äusseren Kräfte über einen Balkenquerschnitt.

Wie auch die ausserhalb eines Balkenquerschnittes wirkenden Kräfte beschaffen sein mögen, so lassen sie sich bekanntlich stets überführen in eine durch den Schwerpunkt S des Querschnitts gehende endliche Kraft und eine unendlich kleine, in der unendlich fernen Ebene wirkende Kraft, ein Kräftepaar. Wir zerlegen nun (Figur 16) die erstere Kraft in eine zum Querschnitt normale Componente P und eine im Querschnitt liegende Kraft Q. Ebenso zerlegen wir die unendlich ferne Kraft in zwei unendlich ferne Kräfte oder zwei Kräftepaare, von denen das erstere in einer zum Querschnitt senkrechten Ebene liegt, also um eine im Querschnitt liegende Gerade Sm dreht, während das andere in der Querschnittsebene wirkt, somit die Balkenaxe zur Drehaxe hat; das Moment des ersteren Kräftepaares nennen wir M, dasjenige des zweiten M_t.

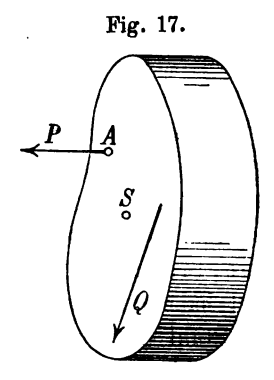
Fig. 16.



Die vier Kräfte, welche man auf diese Weise erhält, beanspruchen den Querschnitt auf vier deutlich zu unterscheidende Arten: Die Kraft P wirkt auf Zug oder, wenn sie die entgegengesetzte Richtung besitzt, auf Druck, die Kraft Q auf Abscheren, das Moment M auf Biegung und das Moment M_t auf Abdrehen (Torsion). In der Praxis kommen diese vier Kräfte teils einzeln, teils zu zweien oder dreien vereinigt vor; selten finden sie sich sämtlich beisammen. Speziell in den Bauconstructionen fehlt in der Regel die auf Torsion wirkende unendlich ferne Kraft, die einzige, welche die Balkenaxe (beziehungsweise die an dieselbe in S gelegte Tangente) nicht schneidet. Dagegen spielt das Torsionsmoment im Maschinenbau eine wesentliche Rolle.

Da die Kraft P und das Kräftepaar M in der nämlichen Ebene liegen, so können sie zu einer Kraft vereinigt werden; man erhält dann (Figur 17) eine gleich grosse und auf dem Schnitt normal stehende Kraft P, welche jedoch den Querschnitt ausserhalb des Schwerpunktes, im «Angriffspunkte» A trifft. Dabei steht die Linie SA auf der Drehaxe des Momentes M senkrecht. (In der Figur 16 hat man sich den Richtungspfeil von M entgegengesetzt zu denken.) In gleicher Weise lässt sich die Kraft Q mit dem Momente M_t zu einer parallel verschobenen, aber noch immer im Schnitte liegenden Kraft zusammensetzen. Die äusseren Kräfte erscheinen somit auf zwei endliche, in der Figur 17 eingezeichnete Kräfte übergeführt, und der Gedanke liegt nahe, diese beiden Kräfte, von denen die eine normale, die andere transversale Spannungen im Querschnitt hervorruft, vollständig getrennt und voneinander unabhängig zu behandeln. Wir werden dieses in der Folge thun, bemerken indessen schon jetzt, dass wir, um den Einfluss der Transversal- oder Querkraft Q zu bestimmen, genötigt sein werden, sie wieder in ihre beiden Bestandteile zu zerlegen.

Fig. 17.



Die als bekannt vorausgesetzten äusseren Kräfte lassen sich auf die verschiedenartigste Weise über einen Balkenquerschnitt verteilen, und unsere Aufgabe wäre unbestimmt, wenn diese Verteilung nicht durch mehr oder weniger richtige Voraussetzungen beschränkt würde.

Die erste dieser Voraussetzungen ist die, dass der Balken nur so schwach belastet werde, dass seine elastischen Formänderungen, selbst bei einer grösseren Länge des Balkens, dieser Längenausdehnung gegenüber vernachlässigt werden können. Würde eine Brücke unter dem darüber weg gehenden oder fahrenden Publikum sich stark biegen und schwanken, so würde dieses nicht allein geängstigt werden, sondern es könnten auch durch die in Schwankung geratenen Massen lebendige Kräfte erzeugt werden, auf die man nicht gerechnet hatte, und durch welche der Bestand des Bauwerks gefährdet werden könnte. Es muss daher schon die Möglichkeit solcher Schwankungen oder Vibrationen von vornherein vermieden werden.

Ebenso vernachlässigen wir die Formänderungen im Querschnitte selbst und nehmen an, dass ein Schnitt, der vor der

Beanspruchung eben war, es auch nach derselben ist. Dies hindert uns jedoch nicht, mit den kleinen Formänderungen zu rechnen und unter anderem die Linie zu bestimmen, in welcher sich zwei ursprünglich parallele Schnitte schneiden, oder auch diejenige Linie, um welche der eine Schnitt gegenüber dem andern eine Drehung vollführt.

Die zweite Hypothese besteht darin, dass wir annehmen, die zur Axe des Balkens parallelen Spannungen bewirken proportionale Längenänderungen der betreffenden Körperelemente, mit andern Worten, die Aenderungen in der Entfernung zweier benachbarter Schnitte seien für je zwei entsprechende Punkte der örtlichen Spannung proportional.

Diese Annahme ist, wie Experimente gezeigt haben, für einige Baumaterialien, namentlich für Walzeisen und Stahl vollkommen zulässig; für andere trifft sie nur annähernd zu. Bei ersteren gilt sie freilich auch nur innerhalb der Elasticitätsgrenze (vgl. Seite 1); da jedoch bei unseren Bauconstructionen mit wenig Ausnahmen bleibende Formänderungen ausgeschlossen sind, das heisst die in der Praxis vorkommenden Spannungen sich stets innerhalb der Elasticitätsgrenze bewegen, so sind wir berechtigt, obige Annahme unseren nachfolgenden Untersuchungen zu Grunde zu legen. Uebrigens soll später (Nr. 29) an einem Beispiele gezeigt werden, wie sich die Verhältnisse bei Ueberschreitung dieser Grenze gestalten.

Aus der Vereinigung unserer beiden Annahmen folgt sofort, dass in jedem Querschnitte die zur Axe parallelen Spannungen proportional ihrer Entfernung von einer geraden Linie zunehmen. Denn wenn zwei benachbarte Querschnitte vor und nach der Beanspruchung, das heisst vor und nach der elastischen Formänderung des Balkens eben sein sollen, so muss der gegenseitige Abstand je zweier entsprechender Punkte sich proportional ihrer Entfernung von einer geraden Linie ändern; es ist dies die Linie, um welche sich der eine Schnitt ein wenig dreht, während der andere festgehalten wird. Wenn aber die Spannungen sich zueinander verhalten wie die Aenderungen dieser Abstände, so sind sie ebenfalls den Entfernungen der betreffenden Körperelemente von dieser Linie proportional.

Diese Linie, welche in jedem Querschnitte eine bestimmte Lage einnimmt, nennt man die neutrale Axe des Schnittes; bei Bewegung des letzteren beschreibt sie eine Regelfläche, die neutrale

Schichte des Balkens. Da die parallel zur Balkenaxe gerichtete Spannung in ein und demselben Querschnitte proportional der Entfernung von der neutralen Axe zunimmt, so folgt, dass sie zu beiden Seiten der neutralen Axe verschiedenes Zeichen hat und in dieser Axe selbst gleich null ist.

Die beiden angeführten Voraussetzungen genügen, um die inneren Spannungen eindeutig zu bestimmen, so lange die ausserhalb eines Querschnittes angreifenden Kräfte sich derart zusammensetzen lassen, dass ihre Mittelkraft, beziehungsweise ihre Mittelkräfte mit der in diesem Schnitte an die Balkenaxe gelegten Tangente in einer Ebene liegen, mit anderen Worten so lange die Mittelkräfte diese Tangente schneiden. Wie schon oben bemerkt wurde, wird diese Bedingung nur von den drei ersten der in der Figur 16 eingezeichneten Kräfte, das heisst von P, Q und M erfüllt; um den Einfluss des Torsionsmomentes M_t zu ermitteln, müssen wir noch weitere Annahmen zu Hülfe nehmen, worüber die Nummern 16 und 17 näheren Aufschluss erteilen.

Die unseren Ableitungen zu Grunde liegenden Hypothesen können freilich nur als Annäherungen an die Wirklichkeit betrachtet werden und die nachfolgenden Resultate dürfen keinen Anspruch auf absolute Richtigkeit machen. Will man die vorliegende Aufgabe mit voller Schärfe durchführen, so muss man an die elastischen Formänderungen unendlich kleiner Körperelemente anknüpfen und der Forderung genügen, dass sowohl die auf diese Elemente wirkenden inneren Kräfte unter sich im Gleichgewicht, als auch die Formänderungen der Elemente unter sich im Einklang stehen. Diese Behandlungsweise der Festigkeitslehre ist zwar von Saint-Venant und Andern wesentlich gefördert worden, bietet jedoch zunächst mehr wissenschaftliches Interesse, und so lange es nicht gelingt, die Früchte dieser Studien in fasslicherer, knapper Form vorzuführen, wird der Techniker es vorziehen, zu mehr oder weniger unsicheren Voraussetzungen seine Zuflucht zu nehmen. Ueberdies berechtigen die Ergebnisse dieser Studien zu der Annahme, dass die auf Grund obiger Hypothesen aufgebaute Theorie der inneren Spannungen, welche in ihren wichtigsten Teilen von Navier herrührt, nicht wesentlich von der Wirklichkeit abweicht, so dass sie, namentlich angesichts der ungleichen Beschaffenheit des in der Bautechnik zur Verwendung gelangenden Materials, als für technische Zwecke vollkommen genügend bezeichnet werden darf.

13. Die normalen Spannungen im Querschnitte.

Wir gehen nun darauf über, die Spannungen zu bestimmen, welche die im Punkte A (Fig. 17) angreifende Normalkraft P im Querschnitte des Balkens hervorruft.

Da diese Spannungen, wie in der vorigen Nummer erklärt worden ist, ihrer Entfernung von einer geraden Linie proportional wachsen, so gehören sie zu denjenigen Kräften, welche schon im ersten Bande von Culmanns «Graphischer Statik»*) im Anschluss an das Trägheitsmoment besprochen worden sind. Was dort (S. 417) von einem System paralleler, an einem ebenen Querschnitte wirkender Kräfte gesagt ist, deren Intensität ihrer Entfernung von einer neutralen Axe proportional ist, gilt ohne weiteres auch von den durch P bewirkten Normalspannungen. Der Wichtigkeit des Gegenstandes entsprechend, sollen jedoch jene Ergebnisse hier nochmals abgeleitet und durch einige weitere ergänzt werden.

Der in Untersuchung stehende Querschnitt habe die in der Figur 18 dargestellte Form: S sei sein Schwerpunkt, A der Angriffspunkt der Kraft P und NN die neutrale Axe. Da die Kraft P nach früher als Mittelkraft einer gleich grossen, im Schwerpunkt angreifenden Kraft und eines Kräftepaares vom Momente M anzusehen ist, so ergibt sich die einfache Beziehung:

Fig. 18.

$$M = P \,.\, AS = P \,.\, p.$$

Da die spezifische Spannung der Entfernung von NN proportional zunimmt, so erreicht sie ihre absolut grössten Werte in denjenigen beiden (in der Figur besonders hervorgehobenen) Punkten, welche am weitesten von NN abstehen.

Wir legen nun durch S ein schiefwinkliges Coordinatensystem und zwar so, dass die y-Axe durch A geht und die x-Axe parallel zur Linie NN läuft. Bezeichnet man sodann die Coordinaten eines beliebigen Flächenelementes ΔF mit x und y, sowie die Ordinate der neutralen Axe mit n, so ist gemäss unserer Annahme

*) Verlag von Meyer & Zeller, Zürich, 1875.

eines eben bleibenden Schnittes die in ΔF herrschende spezifische Spannung dem Werte $y + n$ proportional. Bezeichnet man noch die Ordinate des obersten, von der neutralen Axe am weitesten abstehenden Punktes mit e und die in diesem Punkte wirkende Spannung, das ist die grösste aller vorhandenen Zugspannungen, mit σ, so verhält sich offenbar die im Flächenelemente ΔF herrschende Spannung zu σ wie $y + n$ zu $e + n$; erstere ist daher gleich

$$\sigma \,.\, \frac{y + n}{e + n}.$$

Multiplicirt man diesen Wert mit ΔF, so erhält man die ganze das Element beanspruchende Kraft. Da nun nach früher die Kraft P diese inneren Spannungen hervorruft und die Mittelkraft derselben ist, so erhalten wir sofort die Gleichung

$$P = \Sigma\, \sigma \,.\, \frac{y + n}{e + n} \,.\, \Delta F$$

oder, da σ, e und n constante, von der Lage des Elementes unabhängige Werte sind,

$$P = \frac{\sigma}{e + n}\, \Sigma (y + n)\, \Delta F = \frac{\sigma}{e + n}\, (\Sigma\, y \,.\, \Delta F + n\, \Sigma \Delta F).$$

Die erste der in der Klammer vorkommenden Summen ist aber gleich null, da sie das statische Moment der ganzen Fläche, bezogen auf eine Schwerpunktsaxe darstellt; nennt man dann noch den Flächeninhalt der ganzen Figur F, so wird die Normalkraft

$$P = \frac{\sigma n F}{e + n} \qquad (1)$$

und die grösste Zugspannung

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{e}{n}\right). \qquad (2)$$

Führt man an Stelle von σ die Spannung σ' ein, welche in dem unteren der beiden entferntesten Punkte herrscht, dessen Ordinate, absolut genommen, gleich e' ist, so erhält man die kleinste aller Spannungen

$$\sigma' = \frac{P}{F}\left(1 - \frac{e'}{n}\right). \qquad (3)$$

Wenn die neutrale Axe den Querschnitt schneidet, wie es in der Figur 18 angenommen ist, so ist e' grösser als n, und σ' wird negativ, bezeichnet somit eine Druckspannung.

Die Spannung in einem beliebigen Punkte mit der Ordinate y erhält man, wenn man σ mit $\frac{y+n}{e+n}$ multiplicirt. Speziell im Schwerpunkt herrscht daher ($y = 0$) die Spannung

$$\sigma_s = \frac{P}{F}. \tag{4}$$

Die Spannung, welche der Querschnitt im Schwerpunkt erfährt, ist demnach von der Lage der neutralen Axe unabhängig und stets so gross, als ob die Kraft P über den ganzen Querschnitt gleichförmig verteilt wäre.

Wenn aber P die Mittelkraft aller inneren Normalspannungen ist, so muss auch das statische Moment von P der Summe der statischen Momente sämtlicher Spannungen gleich sein.

Beziehen wir die Momente zunächst auf die x-Axe, wobei wir sämtliche Hebelarme parallel zur y-Axe messen, so folgt

$$M = P \, . \, p = \Sigma \, \sigma \, . \, \frac{y+n}{e+n} \, . \, \varDelta F \, . \, y$$

oder mit Rücksicht auf die Unveränderlichkeit von σ, e und n

$$M = P \, . \, p = \frac{\sigma}{e+n} \, \Sigma \, (y^2 + n y) \, \varDelta F$$

$$= \frac{\sigma}{e+n} \, (\Sigma \, y^2 \, . \, \varDelta F + n \, \Sigma \, y \, . \, \varDelta F).$$

Das zweite Glied in der Klammer verschwindet wie vorhin; das erste dagegen ist nichts anderes als das Trägheitsmoment der Figur, bezogen auf die x-Axe; setzt man

$$\Sigma \, y^2 \, . \, \varDelta F = J,$$

so wird

$$M = P \, . \, p = \frac{\sigma \, . \, J}{e+n}. \tag{5}$$

In diesem Ausdrucke sind die Längen p, e und n streng genommen parallel zu AS zu messen; dasselbe gilt von den y bei der Berechnung von J. Es macht jedoch offenbar keinen Unterschied, wenn man diese sämtlichen Werte senkrecht zur x-Axe misst.

Bezieht man zweitens die statischen Momente der Kraft P und der ihr entsprechenden inneren Spannungen auf die y-Axe, so ergibt sich

$$P \, . \, 0 = \Sigma \, \sigma \, . \, \frac{y+n}{e+n} \, . \, \varDelta F \, . \, x$$

oder auf Grund der vorigen Ueberlegungen

$$0 = \frac{\sigma}{e + n} \Sigma x . y . \Delta F. \qquad (6)$$

Der hier auftretende Summenausdruck heisst Centrifugalmoment der Querschnittsfigur; da im Allgemeinen σ nicht null und $e + n$ nicht unendlich gross ist, so muss das Centrifugalmoment verschwinden; das geschieht aber nur dann, wenn die angenommenen Coordinatenaxen conjugirte Durchmesser der Centralellipse der Figur sind. (Vgl. Culmanns Graph. Statik, S. 401.)

Aus den Gleichungen (1) und (5) folgt ferner durch Division

$$p = \frac{J}{n F}$$

oder, wenn man den in der y-Axe liegenden Halbmesser der Centralellipse mit i bezeichnet und das Trägheitsmoment J durch $F . i^2$ ersetzt,

$$p . n = i^2. \qquad (7)$$

Auf der y-Axe bilden hiernach der Punkt A und der Schnittpunkt von NN eine Involution, in welcher S den Mittelpunkt und die Ellipsenpunkte ein Paar entsprechender Punkte darstellen. Nimmt man noch hinzu, dass die Coordinatenaxen conjugirte Durchmesser der Ellipse bilden, so folgt der interessante und nützliche Satz:

Die neutrale Axe ist die Antipolare des Angriffspunktes hinsichtlich der Centralellipse des Querschnittes. —

In manchen Fällen ist es wünschenswert, sofort zu wissen, ob die Kraft P nur gleichartige Spannungen oder sowohl Zug- als Druckspannungen erzeugt, mit anderen Worten, ob die neutrale Axe ausserhalb des Querschnittes liegt oder denselben schneidet.

Um diese Frage zu beantworten, lässt man die neutrale Axe als Tangente die Querschnittsfigur umfahren, jedoch so, dass sie diese Figur niemals schneidet; dann beschreibt ihr Antipol eine geschlossene Figur, welcher man den Namen «Centralkern» gegeben hat. In der Figur 18 ist dieser Kern eingezeichnet und schraffirt. So lange nun die Kraft P den Querschnitt innerhalb des Kernes trifft, liegt die neutrale Axe ausserhalb des Querschnittes und die Kraft ruft ausschliesslich Zug-, oder, wenn sie gegen den Schnitt gerichtet ist, lauter Druckspannungen hervor. Liegt der Angriffspunkt von P dagegen ausserhalb des Kernes, so entstehen stets Spannungen verschiedenen Zeichens.

Jedem Punkte des Kernumfanges entspricht als Antipolare eine Tangente der Schnittfigur; speziell entspricht dem auf der y-Axe liegenden Punkte K mit der Ordinate k eine zur x-Axe parallele Tangente; es ist diejenige, welche durch den entferntesten Punkt des Querschnittes geht und somit die Ordinate e hat. Da nun die Gleichung (7) von jedem Punkte und seiner Antipolaren gilt, so folgt, dass

$$k \, . \, e = i^2 \qquad (8)$$

ist. Diese Gleichung ermöglicht es, für jede gegebene Tangente die Entfernung des entsprechenden Kernpunktes vom Schwerpunkte, den sogenannten «Kernradius» k zu berechnen, was bei einfachen Figuren in der Regel bequemer ist als die graphische Construction.

Wie übrigens der Centralkern für einfache Figuren berechnet und für complicirtere gezeichnet wird, ist schon im ersten Bande von Culmanns «Graphischer Statik» (2. Aufl., S. 438—488) an verschiedenen Beispielen gezeigt worden.

Mit Hülfe des Kernes kann aber auch die grösste im Querschnitt herrschende Spannung leicht gefunden werden. Multiplicirt man in der Gleichung (2) Zähler und Nenner des in der Klammer stehenden Bruches mit p und berücksichtigt, dass nach (7) und (8)

$$p \, . \, n = i^2 = k \, . \, e$$

ist, so bekommt man

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{p}{k}\right) = \frac{P(k+p)}{Fk}. \qquad (9)$$

Der Zähler dieses Bruches ist (Fig. 18) nichts anderes als das statische Moment der Kraft P hinsichtlich des auf der Linie AS liegenden Kernpunktes K; wir nennen es in Zukunft das «Kernmoment» der Kraft P. Der Nenner dagegen ist (wegen $Fke = Fi^2 = J$) identisch mit dem Quotienten $\frac{J}{e}$; er wird gewöhnlich das «Widerstandsmoment» des Querschnittes genannt und mit W bezeichnet. Obige Formel lautet dann in gedrängter Fassung:

Die grösste Spannung ist gleich dem Kernmoment dividirt durch das Widerstandsmoment.

Will man hiernach die grösste in einem Querschnitte vorkommende Spannung finden, so verbinde man den Angriffspunkt A der Kraft P mit dem Schwerpunkte S und bestimme den Punkt K,

in welchem diese Verbindungslinie den Kernumfang jenseits des Schwerpunktes schneidet. Dann ist $P.AK$ das Kernmoment, $F.SK$ das Widerstandsmoment und die gesuchte Spannung gleich $\frac{P.AK}{F.SK}$. Dabei herrscht die so berechnete grösste Spannung stets in demjenigen Querschnittspunkte, welcher auf der Seite des Angriffspunktes am weitesten von dem zu AS conjugirten Durchmesser absteht.

Will man auch die kleinste Spannung kennen, welche am entgegengesetzten Ende des Querschnittes auftritt, so findet man zunächst aus der Gleichung (3) wie oben

$$\sigma' = \frac{P(k'-p)}{Fk'} \tag{10}$$

und ersieht hieraus, dass jetzt an Stelle des unterhalb S liegenden Kernpunktes K der oberhalb liegende K' massgebend ist.

Man beachte, dass dem obersten Punkte des Querschnitts stets der untere Kernpunkt, dem untersten Punkte der obere Kernpunkt entspricht.

Sollte das Vorzeichen der gefundenen Spannungen zweifelhaft sein, so beachte man ferner, dass die beiden Grenzspannungen σ und σ' gleiches oder ungleiches Zeichen haben, je nachdem die Kraft innerhalb oder ausserhalb des Centralkerns angreift, und dass die dem Angriffspunkte zugewandte Seite des Querschnittes Zug oder Druck erfährt, je nachdem P selbst eine Zug- oder Druckkraft ist. —

Deckt sich der Angriffspunkt der Kraft P mit dem Schwerpunkte, das heisst wird der Hebelarm p und damit das Moment M gleich null, so fällt die neutrale Axe ins Unendliche. Da in diesem Falle alle Flächenelemente von der neutralen Axe gleichen Abstand haben, so erfahren sie sämtlich die gleiche Spannung: die Kraft P verteilt sich gleichförmig über den Querschnitt. Die Grösse dieser Spannung findet sich nach der Gleichung (2) für $n = \infty$

$$\sigma = \frac{P}{F}. \tag{11}$$

Je nachdem die Kraft P vom Querschnitte weg oder gegen denselben gerichtet ist, haben wir σ als Zug- oder als Druckspannung anzusehen.

Fällt dagegen der Angriffspunkt A ins Unendliche, was immer

dann eintritt, wenn die Kraft P sich auf eine unendlich kleine, unendlich ferne Kraft, das heisst auf ein Kräftepaar reducirt, so geht die neutrale Axe durch den Schwerpunkt und ist dabei conjugirt zu der Linie, in welcher die Ebene des Kräftepaars den Querschnitt schneidet. In diesem Fall entstehen im Querschnitte sowohl Zug- als auch Druckspannungen. Die grösste Spannung tritt in dem äussersten Punkte mit der Ordinate e ein und ergibt sich für $n = 0$ aus der Gleichung (5)

$$\sigma = \frac{M \,.\, e}{J}. \tag{12}$$

Wir sagen in diesem Falle, der Querschnitt werde auf Biegung beansprucht. Will man die Spannung im andern der beiden äussersten Punkte kennen, so hat man in dieser Formel e durch $-e'$ zu ersetzen.

Der allgemeine Fall, in welchem der Punkt A weder in S noch im Unendlichen liegt, lässt sich übrigens stets als eine Vereinigung der beiden soeben besprochenen Spezialfälle ansehen, und wenn man nicht vom Centralkern Gebrauch machen will, so führt diese Auffassung ebenfalls rasch zum Ziele. Man denkt sich dann die Kraft P wieder übergeführt in eine gleich grosse, im Schwerpunkt angreifende Kraft und eine unendlich ferne Kraft (ein Kräftepaar) M, bestimmt den Einfluss jeder einzelnen derselben und findet hierauf durch Addition den Gesamteinfluss.

Bleibt P constant und bewegt sich so, dass sein Angriffspunkt einen Kreis mit dem Mittelpunkte S beschreibt, so nimmt nach der Gleichung (9) σ zu, wenn k abnimmt und umgekehrt. Die grösste im Querschnitt vorkommende Spannung wird daher ein Maximum, wenn der in der Richtung AS gemessene Kernradius am kleinsten ist. Es folgt daraus die Regel, dass ein gegebener Querschnitt am günstigsten wirkt, wenn der grösste Kernradius in die Richtung AS fällt. Ganz dasselbe gilt, wenn die Kraft P in ein Kräftepaar von constantem Momente übergeht. Hiernach trägt beispielsweise ein Balken mit quadratischem Querschnitte mehr, wenn er mit einer Seite aufliegt, als wenn er auf eine Kante gelegt wird. Da das Widerstandsmoment eines Querschnittes überhaupt dem Kernradius k proportional ist, so lässt letzterer ohne weiteres erkennen, wie die Tragfähigkeit eines Balkens sich ändert, der sich um seine Längsaxe dreht.

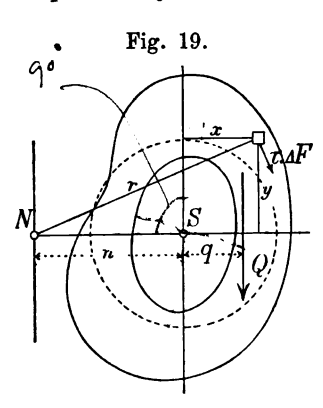
14. Die transversalen Spannungen.

Um den Einfluss zu bestimmen, welchen die Transversalkraft Q (Figur 17) auf den Balkenquerschnitt ausübt, könnte man ganz analog wie bei der Normalkraft vorgehen; man könnte gleich wie dort annehmen, der Querschnitt führe, infolge der Elasticität des Materials, gegenüber einem unendlich benachbarten Schnitte eine unendlich kleine Bewegung aus, und zwar würde dieses eine Drehbewegung um eine auf dem Schnitte normal stehende Axe sein.

Verfolgt man diesen Gedanken weiter, so gelangt man zu folgenden Ergebnissen.

Es sei die in der Figur 19 dargestellte Ellipse die Centralellipse des Querschnitts und N der Punkt, um welchen sich der Schnitt dreht. Dann wird die Transversalspannung eines Flächenelementes senkrecht zu dessen Leitstrahl aus N gerichtet und (wie bei den Normalspannungen) der Entfernung von N proportional sein. Macht man nun NS zur x-Axe, bezeichnet die Entfernung beider Punkte mit n und die in S herrschende Spannung mit τ_s, so wird die Spannung in der Entfernung r von N gleich $\frac{r}{n}\tau_s$; multiplicirt man diesen Wert mit ΔF und zerlegt das Produkt parallel zu den Coordinatenaxen, so erhält man parallel zur x-Axe die Kraft $\frac{y}{n}\tau_s . \Delta F$ und parallel zur y-Axe die Kraft $\frac{n+x}{n}\tau_s . \Delta F$. Summirt man die ersteren Werte über den ganzen Querschnitt, so wird die Summe gleich null, weil n und τ_s constant bleiben und $\Sigma\, y . \Delta F$ für alle durch S gehenden Axen verschwindet. Die Summation der letzteren Werte dagegen führt (wegen $\Sigma\, x . \Delta F = 0$) zu $\tau_s . F$.

Fig. 19.



Daraus ergibt sich, dass die Kraft Q, wenn sie eine Drehung um den Punkt N bewirkt, auf der Linie NS senkrecht steht und gleich $\tau_s . F$ ist, oder in Worten:

Die Scherkraft ist gleich dem Flächeninhalt mal der im Schwerpunkt herrschenden Scherspannung.

Stellt man sodann die statischen Momente der äusseren und inneren Kräfte bezüglich S einander gegenüber, so bekommt man die Beziehung

$$M_t = Q \,.\, q = \Sigma \frac{y}{n} \tau_s \,.\, \Delta F \,.\, y + \Sigma \frac{n + x}{n} \tau_s \,.\, \Delta F \,.\, x$$

woraus folgt

$$M_t = Q \,.\, q = \frac{\tau_s}{n} \Sigma (y^2 + x^2) \Delta F.$$

Der Summenausdruck ist nichts anderes als die Summe der Trägheitsmomente für die x- und die y-Axe; man kann ihn auch durch $\Sigma z^2 \,.\, \Delta F$ ersetzen, wenn z den Abstand des Flächenelementes von S bedeutet, und erkennt hieraus, dass er von der Richtung der Coordinatenaxen unabhängig ist. Man nennt ihn «polares Trägheitsmoment» und bezeichnet ihn mit J_p.

Sind a und b die beiden Halbaxen der Centralellipse, so ist $J_p = (a^2 + b^2) F$. Lässt man ferner einen rechten Winkel, dessen Schenkel die Centralellipse berühren, um diese herumgleiten, so beschreibt der Scheitel einen Kreis, dessen Radius $i_p = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist. Daraus folgt

$$Q \,.\, q = \frac{\tau_s J_p}{n} = \frac{\tau_s i_p^2 F}{n}$$

und mit Rücksicht auf die Beziehung $Q = \tau_s \,.\, F$

$$q \,.\, n = i_p^2,$$

das heisst der Drehpunkt N ist der Antipol der Kraft Q hinsichtlich des Kreises, welcher der Ort aller der Centralellipse umschriebenen rechten Winkel ist.

Die Spannung in einem Punkte, der um r von N absteht, wird nun gleich

$$\frac{r}{n} \tau_s = \frac{r\, Q\, q}{J_p} = \frac{r\, M_t}{J_p}.$$

Weiter ergibt sich, dass wenn Q durch den Schwerpunkt geht, der Drehpunkt unendlich fern liegt, und dass wenn Q sich auf eine unendlich ferne Kraft (ein Torsionsmoment) reducirt, der Drehpunkt mit dem Schwerpunkte zusammenfällt. Im ersteren Falle ist die Spannung im ganzen Querschnitt constant und gleich $\frac{Q}{F}$; im letzteren

ergibt sie sich für einen um z vom Schwerpunkt entfernten Punkt gleich $\frac{Q\,q\,z}{J_p} = \frac{M_t\,z}{J_p}$.

So interessant nun auch diese Resultate sind, so willkommen eine Bestimmung der transversalen Spannungen wäre, die sich derjenigen der normalen Spannungen vollkommen parallel stellt, so zeigt doch eine genauere, an die elastischen Formänderungen der Balkenelemente sich knüpfende Prüfung, dass obige Ergebnisse im Allgemeinen mit der Wirklichkeit nicht in Uebereinstimmung stehen; überdies stösst man, wenn man dieselben mit denjenigen der vorigen Nummer vergleicht, auf Widersprüche. Nur in dem einen Falle, wo der Querschnitt ein Kreis ist und der Drehpunkt mit dessen Mittelpunkt zusammenfällt, geben die abgeleiteten Formeln richtige Resultate; je weiter dagegen die Querschnittsform vom Kreise abweicht und der Drehpunkt vom Schwerpunkte sich entfernt, desto unzuverlässiger werden die nach obigen Voraussetzungen berechneten Spannungen.

Um brauchbarere Methoden zur Berechnung der transversalen Spannungen zu erlangen, müssen wir daher einen andern Weg einschlagen. Wir führen zu diesem Zwecke die ausserhalb des Schwerpunktes wirkende Scherkraft Q über in eine dazu parallele, durch den Schwerpunkt gehende Kraft und ein Kräftepaar mit dem Momente $M_t = Q\,.\,q$ und untersuchen diese beiden Teile gesondert.

15. Die transversalen Spannungen, welche von einer durch den Schwerpunkt gehenden Scherkraft herrühren.

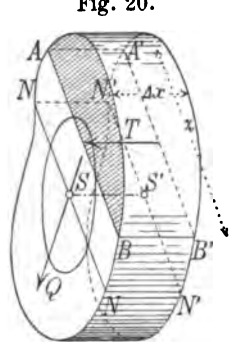
Die im Querschnitt liegende und durch dessen Schwerpunkt gehende Kraft Q ruft in den einzelnen Flächenelementen transversale Spannungen hervor, welche im Allgemeinen nicht parallel zur Scherkraft laufen, sondern deren Richtungen, wie später gezeigt wird, mehr oder weniger von derjenigen der Kraft Q abweichen. Wir zerlegen deshalb diese Spannungen zunächst in je zwei Componenten, von denen die eine parallel mit Q, die andere parallel mit dem zu Q conjugirten Durchmesser der Centralellipse läuft. Die erstere werde mit τ', die letztere mit τ'' bezeichnet.

Um sodann die parallel zu Q gerichteten Spannungen zu be-

stimmen, schlagen wir einen Umweg ein, indem wir vorerst diejenigen Schubspannungen ermitteln, welche, ebenfalls eine Folge von Q, in sogenannten Längsschnitten, das heisst in parallel zur Balkenaxe gerichteten Schnitten wirken.

Zu diesem Zwecke legen wir (Figur 20) in unendlich kleiner Entfernung Δx vom Querschnitt einen zweiten Schnitt, welcher, da sich die Querdimensionen des Balkens nach unserer Voraussetzung nur unwesentlich ändern, als gleich gross wie der erste angesehen werden darf. Da wegen der Kleinheit von Δx auch nur unendlich kleine äussere Kräfte an der durch die beiden Schnitte begrenzten Scheibe angreifen können, so bildet Q auch für den zweiten Schnitt die äussere Kraft. In diesem erzeugt sie aber ausser transversalen auch noch normale Spannungen; denn man kann die durch den Schwerpunkt S gehende Kraft in eine gleich grosse und parallele, durch den Schwerpunkt S' des zweiten Schnittes gehende Kraft und ein Kräftepaar zerlegen; erstere ist die Mittelkraft der im zweiten Schnitt vorhandenen Schubspannungen, letzteres ruft daselbst Zug- und Druckspannungen hervor. Das Moment dieses Kräftepaars ist gleich $Q \,.\, \Delta x$, und da es in einer auf dem Querschnitt senkrechten, durch die Linie der Kraft Q gehenden Ebene wirkt, so erzeugt es nach früher normale Spannungen, deren Intensität proportional der Entfernung von einer neutralen Axe zunimmt. Da diese neutrale Axe ferner die Antipolare des Angriffspunktes der wirkenden Kraft ist und letztere den Querschnitt im unendlich fernen Punkte der Kraft Q trifft, so fällt die neutrale Axe mit dem zu Q conjugirten Durchmesser der Centralellipse zusammen.

Fig. 20.



In der Figur 20 ist diese Linie eingezeichnet und mit $N' N'$ bezeichnet worden. Oberhalb derselben entstehen Zug-, unterhalb derselben Druckspannungen. Die Spannung im äussersten Punkte des Querschnitts wird nach Gleichung (12)

$$\sigma = \frac{M \,.\, e}{J} = \frac{Q \,.\, \Delta x \,.\, e}{J}$$

und in irgend einem anderen Punkte, dessen Ordinate y ist, gleich

$$\frac{y}{e} \,.\, \sigma = \frac{Q \,.\, \Delta x \,.\, y}{J}.$$

Nun legen wir parallel zur Balkenaxe und zur Geraden $N' N'$ einen Schnitt, der die Scheibe von der Dicke $\varDelta x$ in dem schmalen Rechtecke $A B B' A'$ schneidet, und beachten, dass auf das Balkenstück oberhalb dieses Schnittes nur auf der hinteren Seite normale Spannungen wirken; diesen Spannungen muss daher eine Kraft T das Gleichgewicht halten, welche in der genannten Schnittfläche parallel zur Balkenaxe wirkt. Die Grösse dieser auf Abscheren wirkenden Kraft findet man, indem man die auf das abgeschnittene Stück einwirkenden Normalspannungen summirt; dabei ergibt sich, wenn die Ordinate des Längsschnittes mit y bezeichnet wird,

$$T = \sum_y^e \frac{Q \,.\, \varDelta x \,.\, y}{J} \varDelta F = \frac{Q \,.\, \varDelta x}{J} \sum_y^e y \,.\, \varDelta F.$$

Man geht im Allgemeinen nicht stark fehl, wenn man annimmt, dass sich die Kraft T gleichförmig über die Fläche $A B B' A'$ verteilt. Bezeichnet man dann die Länge $A B$, das heisst die Breite, welche der Querschnitt an der betreffenden Stelle besitzt, mit z, so findet sich die in der Schnittfläche herrschende spezifische Spannung

$$\tau = \frac{T}{z \,.\, \varDelta x} = \frac{Q}{z \,.\, J} \sum_y^e y \,.\, \varDelta F. \qquad (13)$$

Die Ordinaten y sind hier sowohl bei der Berechnung von J als auch bei der Bestimmung des Summenausdruckes parallel zur Kraft Q zu messen.

Von den im Längenschnitt wirkenden Schubspannungen ist es nun leicht auf die im Querschnitt wirkenden überzugehen. Wir verwenden zu diesem Zwecke den in der Nummer 8 (S. 26) abgeleiteten Satz:

Zerlegt man die spezifischen Spannungen, welche drei durch einen Punkt gelegte Schnittebenen beanspruchen, parallel zu den drei Schnittkanten dieser Ebenen in je drei Seitenkräfte, so verhalten sich je zwei der in verschiedenen Ebenen liegenden, aber parallel zur dritten Ebene laufenden Transversalspannungen umgekehrt wie die Sinusse der entsprechenden Kantenwinkel.

Legt man nun (Fig. 21) durch den Punkt C, welcher sowohl dem Querschnitt als dem Längenschnitt durch $A B$ angehört, noch einen dritten Schnitt parallel zu Q und normal zum Querschnitt und zerlegt die im Querschnitt wirkende Schubspannung parallel zu Q und zu $A B$ in zwei Componenten τ' und τ'', so bilden die Spannungen τ und τ' zwei im Sinne obigen Satzes einander zu-

gewiesene Werte, und es folgt, wenn ω den Winkel zwischen der Kraft Q und der Axe NN bedeutet,

$$\tau' = \frac{\tau}{\sin \omega} = \frac{Q}{z \,.\, J \,.\, \sin \omega} \sum_y^e y \,.\, \varDelta F.$$

Auch in diesem Ausdrucke sind die Ordinaten y sowohl unter dem Summenzeichen als auch bei der Berechnung von J parallel zu Q zu messen. Misst man sie dagegen normal zur Axe NN und bezeichnet sie in diesem Falle mit y', so wird das sich ergebende

$$J' = \Sigma\, y'^2 \,.\, \varDelta F = \sin^2 \omega \,.\, \Sigma\, y^2 \,.\, \varDelta F = \sin^2 \omega \,.\, J,$$

ferner $$\sum_y^e y' \,.\, \varDelta F = \sin \omega \,.\, \sum_y^e y \,.\, \varDelta F;$$

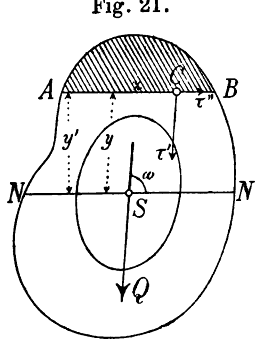
alsdann wird

$$\tau' = \frac{Q}{z \,.\, J'} \,.\, \sum_y^e y' \,.\, \varDelta F. \tag{14}$$

In diesem Falle kommt bei der Berechnung von τ' der Winkel ω nicht in Betracht.

Um daher die von der Kraft Q im Querschnitt erzeugten, parallel zu derselben gerichteten Transversalspannungen zu finden, hat man den zur Kraftrichtung conjugirten Durchmesser NN der Centralellipse zu bestimmen, parallel zu demselben Sehnen zu ziehen, und für jede Sehne das statische Moment des darüber liegenden Querschnittsteiles in Bezug auf die Axe NN zu berechnen; dann ist die gesuchte Spannung in jedem Punkte einer dieser Sehnen gleich der Kraft Q mal diesem statischen Momente, dividirt durch die Sehnenlänge und das auf NN bezogene Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes.

Fig. 21.



Rückt man mit der Sehne AB (Figur 21) allmälig tiefer hinunter, so nimmt der Summenausdruck $\sum_y^e y \,.\, \varDelta F$ zu, bis die Sehne nach NN gelangt; hier erreicht der Ausdruck seinen grössten Wert; dann nimmt er wieder ab und verschwindet, wenn die Sehne am untersten Punkt des Querschnitts anlangt.

Eine noch deutlichere Vorstellung von dieser Aenderung erlangt man, wenn man sich der graphischen Darstellung bedient.

In dieser Hinsicht verweisen wir, obgleich wir später ausführlicher darauf zurückkommen, schon jetzt auf die Constructionen der Tafel 2. Es ist daselbst in den Figuren 2—4 nach dem bekannten Culmann'schen Verfahren das Trägheitsmoment eines Schienenprofils bestimmt worden. Zu diesem Zwecke wurde die Figur in 13 horizontale Streifen zerlegt, der Flächeninhalt jedes Streifens, auf die Basis a reducirt, als Kraft Δr aufgetragen (Fig. 2) und mit Hülfe des Poles O_1 ein Seilpolygon (Fig. 3) gezeichnet. Die äussersten Seiten dieses Polygons bestimmen dann die horizontale Schwerlinie, und zugleich werden auf dieser Linie durch die Seilpolygonseiten Strecken Δs abgeschnitten, welche den statischen Momenten der Flächenstreifen proportional sind. Diese Strecken wurden nun wiederum als Kräfte betrachtet und unter Benützung des Poles O_2 zu einem zweiten Seilpolygon (Fig. 4) zusammengesetzt. Dann stellen die Abschnitte Δt, welche die Seiten dieses Polygons auf der Schwerlinie bestimmen, die Trägheitsmomente der Flächenstreifen dar.

Nennt man den Flächeninhalt eines Streifens ΔF, seinen Abstand von der Schwerlinie y — (wir lassen hier den oberen Index von y der Einfachheit halber weg) —, ferner die erste Poldistanz b und die zweite c, so lassen sich, nach bekannten Eigenschaften der Seilpolygone paralleler Kräfte, folgende drei Gleichungen aufschreiben:

$$\Delta F = a \,.\, \Delta r$$
$$\Delta r \,.\, y = b \,.\, \Delta s$$
$$\Delta s \,.\, y = c \,.\, \Delta t$$

Multiplicirt man diese Gleichungen miteinander, so folgt

$$\Delta F \,.\, y^2 = a \,.\, b \,.\, c \,.\, \Delta t$$

und hieraus durch Summation

$$J = \Sigma \, \Delta F \,.\, y^2 = a \,.\, b \,.\, c \,.\, \Sigma \, \Delta t = a \,.\, b \,.\, c \,.\, t.$$

Ausser dem Trägheitsmoment lässt sich der Construction aber auch das statische Moment für eine beliebige Anzahl Flächenstreifen entnehmen; denn durch Multiplication der zwei ersten der obigen Gleichungen erhält man

$$y \,.\, \Delta F = a \,.\, b \,.\, \Delta s$$

und hiernach

$$\sum_y^e y \,.\, \Delta F = a \,.\, b \,.\, \sum_y^e \Delta s.$$

In der Figur 3 ist für die Lamellengrenze 4/5 die Summe der Δs besonders angedeutet und mit Δs_{1-4} bezeichnet worden.

Trägt man diese Strecken von einer verticalen Axe aus als Abscissen auf und verbindet deren Endpunkte, so erhält man eine Kurve, welche die Aenderung des für die Scherspannungen massgebenden statischen Momentes deutlich erkennen lässt. Auf der Tafel ist dieses in der Figur 1 geschehen, jedoch sind die betreffenden Strecken derart proportional verkleinert worden, dass sie für eine gewisse Scherkraft Q sofort die Werte $\tau\, b\, z$ darstellen.

Hat der Querschnitt constante Breite (Rechteck oder Parallelogramm), so ist die Scherspannung den Abscissen dieser Kurve proportional und demzufolge für die Schwerlinie ein Maximum; noch mehr ist letzteres der Fall, wenn die Querschnittsbreite an dieser Stelle am kleinsten ist (Doppel-T-Profil). Am obersten und untersten Punkte des Querschnittes ist die Spannung jederzeit gleich null.

Unschwer lässt sich zeigen, dass die Addition der über den ganzen Querschnitt verteilten Scherkräfte $\tau' . \varDelta F$ auf die Kraft Q führt. Mit Rücksicht auf die Constructionen der Tafel 2 lässt sich nämlich schreiben

$$\tau' = \frac{Q . a . b}{z . J} \sum_y^e \varDelta s = \frac{Q}{z . c . t} \sum_y^e \varDelta s.$$

In einem beliebigen Flächenstreifen $\varDelta F = z . \varDelta y$ wirkt daher die Kraft

$$\tau' . \varDelta F = \frac{Q . \varDelta y}{c . t} . \sum_y^e \varDelta s.$$

Nun bestimmt aber der Quotient $\left(\sum_y^e \varDelta s\right) : c$ die Neigung der Strahlen aus dem Pole O_2, oder, was dasselbe ist, die Neigung der Seiten des zweiten Seilpolygons (Figur 4); multiplicirt man diese Quotienten mit $\varDelta y$, so erhält man somit die horizontalen Projectionen der einzelnen Seiten dieses Polygons, und wenn man diese für den ganzen Querschnitt summirt, so bekommt man die Strecke t. Die Addition sämtlicher $\tau' . \varDelta F$ führt also in der That auf die Kraft Q.

Analytisch lässt sich dieser Beweis ebenfalls leicht leisten. Ersetzt man nämlich in dem Ausdrucke

$$\int \tau' . dF = \int \tau' . z . dy = \frac{Q}{J} . \int dy \int_y^e y . dF$$

das partielle Integral durch S, so findet man durch teilweise Integration

$$\int dy . S = y . S - \int y . dS.$$

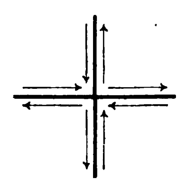
Das erste Glied auf der rechten Seite verschwindet, wenn man die

Grenzen einsetzt; denn sowohl für $y = e$ als für $y = e'$ ist $S = 0$; das zweite Glied aber wird, da $dS = -y \,.\, dF$, gleich $\int y^2 \,.\, dF$, das heisst gleich dem Trägheitsmoment J der ganzen Fläche. Somit wird, wie erwartet,

$$\int \tau' \,.\, dF = Q.$$

Da die Kraft Q die Mittelkraft aller im Querschnitt herrschenden Schubspannungen ist, andrerseits aber, wie soeben gezeigt wurde, gleich der Summe aller Spannungen τ' ist, so folgt, dass die querlaufenden Spannungen τ'' sich untereinander selbst im Gleichgewicht halten.

Die Richtung der Spannung τ' ist stets mit derjenigen von Q identisch und kann daher nicht verwechselt werden. Im Längsschnitt läuft die Spannung für ein gewisses Körperelement jener entgegen; für zwei sich kreuzende Schnitte haben die Spannungen stets die nebenstehend gezeichneten Pfeilrichtungen, beziehungsweise bei nach oben gerichteter Transversalkraft die entgegengesetzten.



Da in der Formel (14) der Ausdruck $\sum_y^e y' \,.\, \Delta F$ vom dritten und J' vom vierten Grade ist, so stellt der Quotient $J' : \sum_y^e y' \,.\, \Delta F$ eine Länge dar; nennen wir diese h_y, so wird die Schubspannung im Abstande y' von NN

$$\tau' = \frac{Q}{z \,.\, h_y}.$$

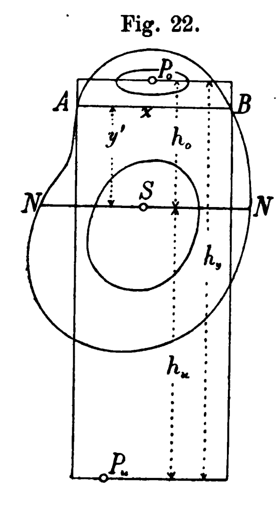


Fig. 22.

Um uns von der Strecke h_y eine deutlichere Vorstellung zu machen, denken wir uns (Figur 22) in jedem der beiden durch die Sehne AB getrennten Querschnittsteile die Centralellipse gezeichnet und bezüglich derselben die Antipole P_o und P_u der Axe NN bestimmt. Die Entfernungen dieser Antipole von NN seien h_o und h_u. Nun ist nach der Theorie der Centralellipse das Trägheitsmoment einer Figur bezüglich einer Axe gleich deren Inhalt, multiplicirt mit dem Abstand ihres Schwerpunktes und mit dem Abstand des Antipols, oder, was dasselbe

bedeutet, gleich dem statischen Momente der Figur mal der Entfernung des Antipols; die statischen Momente der beiden Teile des Querschnittes sind aber entgegengesetzt gleich; folglich wird

$$J' = \left(\sum_{y}^{e} y' \cdot \varDelta F\right)\left(h_o + h_u\right)$$

und hiernach $$h_y = h_o + h_u.$$

Demnach lässt sich der Satz aufstellen: Um für einen Punkt des Querschnittes die zur Querkraft parallele Componente der transversalen Spannung zu finden, lege man durch diesen Punkt die zur Kraftrichtung conjugirte Sehne und bestimme die beiden Antipole der zur Kraftrichtung conjugirten Schwerlinie hinsichtlich der Centralellipsen der durch die Sehne getrennten Querschnittsteile; dann ist die gesuchte Spannung gleich der Querkraft dividirt durch das Produkt aus der Länge der Sehne und dem zu dieser senkrechten Abstand der beiden Antipole. Man kann auch sagen: Q verteilt sich über ein Rechteck, von welchem zwei Seiten gleich und parallel der Sehne sind und durch die beiden Antipole gehen. (Vgl. Fig. 22.)

Es liegt in der Natur der Sache, dass die Strecken h_o und h_u ihre kleinsten Werte erreichen, wenn die Sehne AB durch den Schwerpunkt geht; in diesem Fall wird daher, wie schon oben bemerkt wurde, $\tau' . z$ ein Maximum. Je weiter sich AB auf- oder abwärts von der Axe NN entfernt, desto weiter entfernen sich auch die beiden Antipole; die Grösse $\tau' . z$ nimmt also fortwährend ab und verschwindet gänzlich, wenn AB an den Rand des Querschnitts gelangt, weil dann der eine Antipol im Unendlichen liegt.

Bei Doppel-T-Profilen liegen die beiden Antipole, wenn AB durch den Schwerpunkt geht, ziemlich nahe an der obersten und untersten Kante und ändern ihre Lage nur wenig, wenn man AB über den Steg verschiebt. Man erhält daher für constante Stegdicke ziemlich genaue Resultate, wenn man sagt: Die Scherspannung im Steg eines Doppel-T-Balkens ist gleich der Scherkraft, dividirt durch die Querschnittsfläche des Steges.

Ist das Trägheitsmoment eines Querschnittes mit Hülfe von zwei Seilpolygonen bestimmt worden, so ist h_y für eine gegebene Lamellengrenze auch gleich dem verticalen Abstande der Punkte,

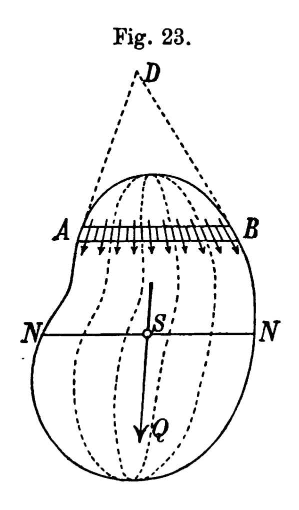
in welchem die entsprechende Seite des zweiten Seilpolygons die erste und letzte Seite desselben schneidet. —

Ausser den parallel zu Q gerichteten Spannungen τ' kommen jedoch im Allgemeinen auch noch parallel zu NN laufende Spannungen τ'' vor. (Siehe Figur 21.)

Es ist zunächst leicht einzusehen, dass die Transversalspannung am Rande des Querschnittes stets parallel zu diesem Rande gerichtet sein muss; denn ist dies nicht der Fall, so liesse sich die Spannung in eine zum Rande parallele und eine dazu senkrechte Componente zerlegen; letzterer müsste dann gemäss den Gesetzen, welchen die an einem Körperelemente angreifenden Kräfte unterworfen sind, eine transversale Oberflächenspannung entsprechen. Solche Spannungen könnten allenfalls durch Reibungskräfte erzeugt werden; da dies aber nur ausnahmsweise der Fall ist, so können wir als Regel hinstellen, dass die transversalen Spannungen an der Oberfläche stets parallel zu dieser gerichtet sind. (Aehnliches gilt streng genommen auch von den Normalspannungen; doch da die in der Richtung der Balkenaxe gezogenen Oberflächenlinien meistens ganz oder doch nahezu parallel zur Axe laufen, so darf man von einer entsprechenden Correctur der normalen Spannungen in der Praxis Umgang nehmen.)

Legt man nun (Figur 23) zwei unendlich benachbarte, zu NN parallele Längsschnitte AB, teilt die beiden Sehnen in eine grössere Anzahl gleicher Teile und verbindet die Teilpunkte, so erhält man ebenso viele kleine Trapeze, deren Trennungslinien alle nach dem Punkte D laufen, in welchem sich die in A und B an den Umfang gelegten Tangenten schneiden. Da nun die kleinen Trapeze nach unseren bisherigen Betrachtungen, sowohl was die normalen als was die im Längsschnitt AB wirkenden Transversalspannungen betrifft, genau gleichartig beansprucht sind, so folgt, dass in den Trennungsflächen keine zur Balkenaxe parallelen Kräfte existiren können; hieraus ergibt sich weiter, dass die im Querschnitte wirkenden Transversalspannungen nach dem Punkte D hin gerichtet sind.

Fig. 23.



Kennt man nun die Richtung der in einer beliebigen Quer-

schnittstelle wirkenden Spannung, sowie deren Componente τ' parallel zu Q, so ist auch die andere Componente τ'' und damit die ganze Spannung vollständig bestimmt.

Folgt man, an einer beliebigen Stelle beginnend, der Richtung dieser Spannung von Punkt zu Punkt, so bekommt man eine krumme Linie, die vom höchsten bis zum tiefsten Punkte des Querschnitts verläuft und die man «Schubkurve» nennen könnte. Da von jedem Punkte der Sehne AB ausgegangen werden kann, so gibt es unendlich viele solcher Linien und deren Gesamtheit bedeckt den ganzen Querschnitt. Wird dieser durch die Kraft Q in zwei symmetrische Hälften geteilt, so sind alle diese Kurven unter sich affin verwandt mit der Richtungslinie von Q als Affinitätsaxe. In der Figur 23 sind einige dieser Linien punktirt eingezeichnet worden.

16. Torsionsspannungen.

In zweiter Linie haben wir nun den Einfluss zu besprechen, welchen das Torsionsmoment M_t ausübt.

Wie in der vorletzten Nummer bemerkt worden ist, geben unsere dort abgeleiteten Formeln nur für kreisförmige Querschnitte genaue Resultate; für andere Figuren müssen neue Wege eingeschlagen werden. Der Analysis ist es nun zwar gelungen, die Spannungen, welche ein um die Balkenaxe drehendes Kräftepaar erzeugt, für einige einfache Querschnittsprofile zu bestimmen. Die im Querschnitte auftretenden, ausschliesslich transversal gerichteten Spannungen werden dabei gewöhnlich parallel zu zwei Coordinatenaxen zerlegt und beide Componenten als zunächst unbestimmte Functionen der betreffenden Coordinaten ausgedrückt; auf Grund einfacher Gleichgewichts- und Elasticitätsgesetze, sowie auf Grund der Bedingung, dass die Randspannungen stets parallel zur Oberfläche laufen müssen, ist es sodann möglich, diese Functionen zu berechnen. Die Durchführung dieser Aufgabe führt indessen zu umfangreichen Rechnungen, sobald man sich nicht auf die allereinfachsten Figuren beschränkt. Diese Rechnungen wiederzugeben ist nicht Aufgabe eines Buches über graphische Statik. Wir beschränken uns darauf, anzudeuten, dass sich auch hier, wie bei den von der Kraft Q erzeugten Spannungen, im Querschnitt krumme Linien ziehen lassen, welche an jeder Stelle der Richtung der Spannung

folgen. Während jedoch im ersteren Falle diese Kurven in den zwei Punkten des Querschnittes, welche am weitesten von der Axe NN abstehen, sich begegnen, bilden sie hier geschlossene Ringe, die sich nirgends in reellen Punkten schneiden, sondern sich concentrisch um einen Punkt, den Drehmittelpunkt, herum legen und nach aussen hin sich mehr und mehr dem Rande anschmiegen. Die Intensität der längs diesen Ringen sich fortpflanzenden Spannung ist im Allgemeinen veränderlich; dagegen nimmt sie, wenn man einem durch den Mittelpunkt gelegten Radius folgt, von Kurve zu Kurve zu. Besitzt die Querschnittsfigur zwei Symmetrieaxen, so fällt der Drehmittelpunkt mit dem Schwerpunkte zusammen und die Kurven werden ebenfalls durch diese Axen symmetrisch geteilt.

Speziell beim Kreise werden diese Kurven, wie zu erwarten ist, kreisförmig; zugleich gibt unsere auf der Seite 61 stehende Formel in diesem Falle genaue Resultate; die Spannung wird in jedem einzelnen Ringe gleich $\frac{M_t z}{J_p}$, wenn z dessen Radius bezeichnet. Eine einfache Integration zeigt, dass

$$J_p = \frac{\pi r^4}{2}$$

ist; die Gleichung für die Torsionsspannung lautet daher auch

$$\tau_t = \frac{2 M_t z}{\pi r^4}. \qquad (15)$$

Im Mittelpunkt des Kreises ist die Torsionsspannung gleich null; nach dem Rande zu wird sie immer grösser und für den Kreisrand selbst gleich

$$\tau_{\max} = \frac{2 M_t}{\pi r^3}. \qquad (16)$$

Den Spannungen im Querschnitte entsprechen jedoch auch solche in Schnitten parallel zur Balkenaxe; ihre Grösse lässt sich mit Hülfe des Satzes auf der Seite 26 oder auch direct mit Hülfe einfacher Gleichgewichtsbedingungen unschwer finden. Auf Schnittflächen senkrecht zur Richtung des Radius wirkt stets die gleiche Spannung wie im Querschnitt; dreht man die Schnittfläche, so verringert sich die Spannung und verschwindet, wenn die Fläche radial gerichtet ist.

In der elementaren Mechanik wird zuweilen die Formel (15) auch auf andere als kreisförmige Querschnitte angewendet; das

genauere Rechnungsverfahren zeigt aber, dass dieses nur allenfalls für dem Kreise nahestehende Figuren zulässig ist; je mehr der Umfang von einem Kreise abweicht, desto fehlerhafter werden, wie schon früher bemerkt, die Resultate.

17. Vereinigung von Scherkraft und Torsionsmoment.

Wir wollen nun noch kurz die Vereinigung von Q und M_t ins Auge fassen. Wenn zu gleicher Zeit eine durch den Schwerpunkt gehende Transversalkraft und ein Torsionsmoment auf den Querschnitt einwirken, mit anderen Worten, wenn dieser unter dem Einfluss einer abseits vom Schwerpunkt liegenden Transversalkraft steht, so summiren sich an jedem Punkte des Querschnittes die von beiden Einzelkräften herstammenden Spannungen. Bestimmt man auf gewöhnliche Weise an jeder Stelle die Mittelkraft beider Spannungen, so erhält man eine neue Spannung, deren Richtung man wiederum durch eine continuirliche Kurve verfolgen kann. Es lassen sich somit drei Systeme oder Büschel von Schubkurven im Querschnitte unterscheiden; die Linien des ersten Systems schneiden sich sämtlich in zwei Punkten des Umfangs (Figur 23); diejenigen des zweiten sind geschlossene Ringe, welche sich concentrisch um den Drehmittelpunkt legen; das dritte System entsteht durch Vereinigung der beiden ersten.

Nun gibt es aber eine Kurve, welche allen drei Systemen angehört, das ist der Umfang des Querschnittes; denn die Spannung am Rande ist unter allen Umständen parallel zu diesem gerichtet. Der Sinn dieser Randspannung kann verschieden sein; unter dem Einfluss einer durch den Schwerpunkt gehenden und abwärts gerichteten Kraft Q entstehen Spannungen in der Richtung von oben nach unten; ein Drehmoment dagegen ruft stets Spannungen hervor, welche in einem bestimmten Sinne dem Umfange des Querschnittes folgen. Dreht das Kräftepaar M_t nach rechts, so laufen die von ihm erzeugten Spannungen den von Q herrührenden auf der linken Seite des Querschnittes entgegen. Dabei kann es Stellen geben, in welchen sich beide Kräfte aufheben, in welchen somit die Transversalspannung absolut null ist. Da solche Punkte den Umfang in Strecken zerlegen, in welchen die Randspannung abwechselnd nach rechts und nach links dreht, so müssen sie stets zu Paaren

vorkommen. Die Richtung der Spannung ist in diesen Punkten unbestimmt; man kann daher an diesen Stellen eine Kurve des dritten Büschels in beliebiger Richtung beginnen. Daraus folgt, dass unendlich viele, mit andern Worten sämtliche Kurven durch diese Punkte gehen.

Die Kurven der Transversalspannungen bilden daher im Querschnitt einen Büschel mit n Paaren von im Umfang liegenden Grundpunkten.

Fig. 24.

Besonderes Interesse bieten die in einem **kreisförmigen** Querschnitte entstehenden Kurven.

Um die im Punkte xy vertical abwärts wirkende Spannung τ' zu finden, berechnen wir vorerst das statische Moment des über AB liegenden Segmentes in Bezug auf die x-Axe. Ein horizontaler Streifen von der Breite z und der Höhe dy hat das Moment $yzdy$. Da $y^2 + {}^1/_4\, z^2 = r^2$, folglich $y\,dy + {}^1/_4\, z\,dz = 0$ ist, so ist dieses statische Moment auch gleich $- {}^1/_4\, z^2\,dz$. Die Integration zwischen den Grenzen z und 0 führt zu ${}^1/_{12}\, z^3$. Nach der Gleichung (14) (Seite 64) ergibt sich somit, da das Trägheitsmoment des Kreises gleich ${}^1/_4\, \pi r^4$ ist,

$$\tau' = \frac{Q \,.\, {}^1/_{12}\, z^3}{z \,.\, J} = \frac{Q\, z^2}{3\, \pi\, r^4}.$$

Trägt man diese Werte von einer Verticalen aus horizontal auf, so liegen ihre Endpunkte (wegen ${}^1/_4\, z^2 = r^2 - y^2$) auf einer Parabel.

Da sodann die horizontal gerichtete Spannung τ'' mit τ' eine durch D gehende Mittelkraft geben muss, so verhält sich

$$\tau'' : \tau' = x : DE = x : \frac{z^2}{4\, y};$$

somit wird

$$\tau'' = \frac{4\, Q\, x\, y}{3\, \pi\, r^4}.$$

Die vom Drehmomente $M_t = Qq$ herrührende, normal zu v gerichtete Spannung endlich wird, da die Randspannung nach der Formel (16) gleich $\frac{2\, M_t}{\pi\, r^3}$ ist,

$$\tau_t = \frac{v}{r} \cdot \frac{2\, Q\, q}{\pi\, r^3} = \frac{2\, v\, Q\, q}{\pi\, r^4}.$$

Multiplicirt man diesen Wert mit $\frac{x}{v}$ und mit $\frac{y}{v}$, so erhäl
die verticale und die horizontale Seitenkraft von τ_t. In ver
Richtung wirkt somit die Gesamtspannung

$$\tau_y = \frac{Q z^2}{3 \pi r^4} + \frac{2 x Q q}{\pi r^4}$$

und in horizontaler Richtung die Spannung

$$\tau_x = \frac{4 Q x y}{3 \pi r^4} + \frac{2 y Q q}{\pi r^4}.$$

Dividirt man diese beiden Werte durch einander und ersetzt
z^2 durch $4(r^2 - y^2)$, so erhält man die Differentialgleichun
Spannungskurve

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{2(r^2 - y^2) + 3 q x}{2 x y + 3 q y}$$

und durch Integration die Gleichung

$$c(x^2 + y^2 - r^2) = (2x + 3q)^2.$$

Die Spannungskurven sind hiernach Kegelschnitte, und
(soweit sie reell sind) Hyperbeln, so lange die willkürliche Const
zwischen 0 und 4 liegt, sonst Ellipsen. Von sämtlichen K
fällt eine der Axen mit der x-Axe zusammen. Da die Glei
durch $x^2 + y^2 = r^2$ und $x = -{}^3/_2\, q$ unabhängig von c erfüllt
so gehen sämtliche Kurven durch die zwei Punkte, in welche
verticale Gerade im Abstand $-{}^3/_2\, q$ vom Centrum den gege
Kreis schneidet. Ist q grösser als ${}^2/_3\, r$, so werden diese P
imaginär; dann haben die Kurven keine reellen Grundpunkte
der Figur 24 ist die durch C gehende Kurve eingezeichnet w

Weiter ergibt sich leicht, dass die x-Axe von jeder Ku
zwei Punkten geschnitten wird, deren Abscissen gleich

$$\frac{6q \pm \sqrt{9 c q^2 + c(c-4) r^2}}{c-4}$$

sind; der Mittelpunkt der Kurve hat daher die Abscisse $m =$

und die horizontale Halbaxe ist $a = \frac{\sqrt{9 c q^2 + c(c-4) r^2}}{c-4}$.
man für x die Abscisse des Mittelpunktes ein und löst n
auf, so findet man die verticale Halbaxe $b = \sqrt{r^2 + \frac{9 q^2}{c-4}}$.

$c = 4 - \frac{9q^2}{r^2}$ werden beide Halbaxen gleich null; die Kurve degenerirt in diesem Falle in zwei gerade Linien, beziehungsweise in einen Punkt mit den Coordinaten $x = -\frac{2r^2}{3q}$, $y = 0$; man könnte ihn den Drehmittelpunkt nennen.

Hat der Büschel keine reellen Grundpunkte ($q > {}^2/_3\, r$), so liegen die Kurven innerhalb des Kreises, so lange c kleiner als $4 - \frac{9q^2}{r^2}$ ist, dagegen ausserhalb, so lange c grösser als null ist; für zwischenliegende Werte werden sie imaginär. Sind die Grundpunkte reell ($q < {}^2/_3\, r$), so besitzt der Büschel lauter reelle Kurven, von welchen je ein Zweig innerhalb, ein anderer ausserhalb der Kreisfläche liegt.

Die absolut grösste Spannung tritt in dem der Kraft Q am nächsten gelegenen Kreispunkte mit den Coordinaten $x = r$, $y = 0$ ein, weil sich hier die grösste Schubspannung und die grösste Torsionsspannung addiren. Die Summe beider ergibt sich in diesem Punkte

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{\pi r^3}\left(\frac{4}{3} r + 2q\right).$$

Die absolut kleinste Spannung ist gleich null und stellt sich in den Grundpunkten, falls diese reell sind, andernfalls im Drehmittelpunkte $\left(m = -\frac{2r^2}{3q}\right)$ ein.

Wir werden die vorstehenden Ergebnisse in der Nummer 27 weiter verwerten.

18. Maximalspannungen; Zug- und Druckkurven.

Nach den in den vorigen Nummern angestellten Untersuchungen ruft eine auf dem Querschnitt senkrecht stehende Kraft P in den einzelnen Flächenelementen des Schnittes normale, eine im Querschnitt liegende Kraft Q dagegen transversale Spannungen hervor. Den letztern entsprechend treten auch in Längsschnitten, das heisst in Schnitten, welche parallel zur Balkenaxe geführt werden, transversale Spannungen, und zwar stets parallel zur Axe gerichtete, auf. Die Grösse dieser letztern kann man (nach Nr. 8, S. 26) für ein

gegebenes, zur Axe paralleles Flächenelement stets dadurch finden, dass man die an der betreffenden Stelle im Querschnitt wirkende Spannung parallel und normal zu diesem Flächenelement zerlegt; die normale Seitenkraft stellt dann zugleich die im Längsschnitt wirkende Spannung dar.

Andere als die soeben aufgezählten inneren Kräfte sind uns bis jetzt, wenn wir von den sogenannten Oberflächenkräften (s. Nr. 19) absehen, nicht entgegengetreten. Die Folge hiervon ist, dass wir die Ableitung der Maximalspannungen, der Zug- und Druckkurven etc. als Aufgaben in der Ebene durchführen können. Bildet man nämlich ein unendlich kleines Dreikant, indem man von einem Punkte des Querschnittes aus eine Parallele zur Balkenaxe, eine Tangente an die Kurve der Transversalspannungen und eine dritte zu beiden Linien senkrechte Linie zieht, so wird die durch die beiden ersten gelegte Fläche weder von normalen noch von transversalen Kräften beansprucht. Von den neun Kräften, welche wir am Dreikant der Figur 14 (Seite 26) unterschieden haben, werden, wenn man OA als Parallele zur Balkenaxe und OB als Tangente an die Schubkurve ansieht, die Kräfte S_3, T_{31} und T_{32} gleich null; demzufolge verschwinden auch T_{13} und T_{23} und es bleiben nur Kräfte übrig, die parallel zur Ebene OAB laufen. Das Spannungsellipsoid des betreffenden Punktes besitzt daher in der zu dieser Fläche senkrechten Richtung keine Ausdehnung, sondern schrumpft zu einer Ellipse zusammen.

Zerschneidet man nun den ganzen Balken den Schubkurven entlang in einzelne Schalen oder gebogene Scheiben, so lassen sich auf der Oberfläche dieser Schalen alle die Constructionen durchführen, die im ersten Kapitel in den Nummern 3 bis 7 besprochen worden sind. Wickelt man die krumme Oberfläche in eine Ebene auf, so lässt sich auf dieser für jeden Punkt die Grösse und Richtung der grössten und kleinsten Normalspannung construiren, und im Anschluss daran kann man alsdann Zug- und Druckkurven ziehen und deren Verlauf auf die krumme Fläche zurück übertragen. Auf diese Weise gelingt es, diese Kurven in einem Körper zu zeichnen, ohne die verwickelten Constructionen der Nummer 9 zu Hülfe nehmen zu müssen. Von den drei Systemen von Zug- und Druckkurven, welche im Allgemeinen in einem von äusseren Kräften beanspruchten Körper bestehen, geht hier das

eine verloren und die beiden andern bewegen sich, Schraubenlinien ähnlich, in leicht bestimmbaren cylindrischen Flächen.

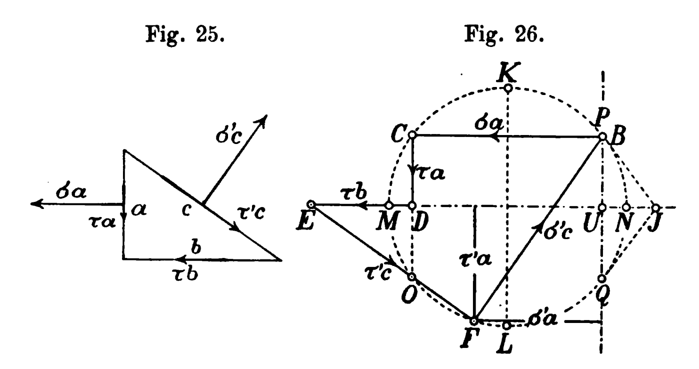
Auf der Tafel 5 ist eine Construction dieser Art durchgeführt worden. Besondere Schwierigkeiten bietet dieselbe keineswegs; doch bleibt die Arbeit immer noch recht umständlich und würde es noch mehr sein, wenn eine andere Querschnittsfigur gewählt worden wäre. Man wird sich daher, wenn keine Torsionskräfte vorhanden und die äusseren Kräfte in einer Symmetrieebene des Balkens wirken, in der Regel darauf beschränken, die betreffenden Constructionen in dieser Ebene auszuführen, obgleich die Spannungen in Längsschnitten, die anderen Schubkurven folgen, und besonders am Rande des Balkens naturgemäss grösser ausfallen.

Was die Construction der Zug- und Druckkurven im Einzelnen betrifft, so ist alles Wesentliche schon im ersten Kapitel gesagt worden. Doch mag es gut sein, die Ergebnisse der dortigen Untersuchungen kurz zu wiederholen und unter spezieller Berücksichtigung von belasteten Balken zu ergänzen.

Schneidet man aus einer der vorhin besprochenen cylindrischen Schalen an einem beliebigen Punkte durch einen Querschnitt, einen Längsschnitt und einen beliebig gerichteten schiefen Schnitt ein unendlich kleines Element von der Form eines dreiseitigen Prismas heraus (Figur 25), so wirken auf die Querseite a desselben eine bekannte normale und eine bekannte transversale Spannung, σ und τ; auf die Längsseite b dagegen wirkt nur eine transversale Spannung τ, die an Intensität der vorigen gleich ist. Die dritte, schiefe Seite c wird von Kräften σ' und τ' beansprucht, deren Grösse wir erst bestimmen müssen. Multiplicirt man nun die verschiedenen spezifischen Spannungen mit den entsprechenden Seitenlängen des Dreiecks und setzt sie, (wie dies in den Figuren 8 und 11, Seite 14 und 18 geschehen ist) zusammen, so entsteht das geschlossene Kräftepolygon $BCDEFB$ (Fig. 26). Da hier auf die Seite b keine Normalkraft wirkt, so besteht dieses Polygon nur aus fünf Kräften. Sind die Spannungen σ und τ bekannt, so können die Spannungen σ' und τ' für jede beliebige Schnittrichtung bestimmt werden. Hält man, um diese Richtung zu verändern, die Länge von a fest und gibt der Seite b verschiedene Längen, so bleiben die Punkte BCD im Kräftepolygon fest und der Punkt E bewegt sich auf einer Horizontalen. Die Seite EF jedoch dreht sich um den festen Punkt O; denn da das Dreieck DEO dem Elementendreieck ähnlich ist, so

hat DO den constanten Wert τa. Da ferner OFB stets ein rechter Winkel bleibt, so beschreibt der Punkt F während der Veränderung von b einen Kreis über dem Durchmesser BO. Legt man durch B eine Verticale und durch D eine Horizontale und betrachtet diese Linien, die sich in U schneiden, als Coordinatenaxen, so sind die Coordinaten von F, wieder aus Gründen der Aehnlichkeit, gleich $\sigma' a$ und $\tau' a$, und gestatten, da a als constant angenommen wurde, eine bequeme Uebersicht über die Aenderung, welche σ' und τ' bei wechselnder Schnittrichtung erfahren.

Fig. 25. Fig. 26.



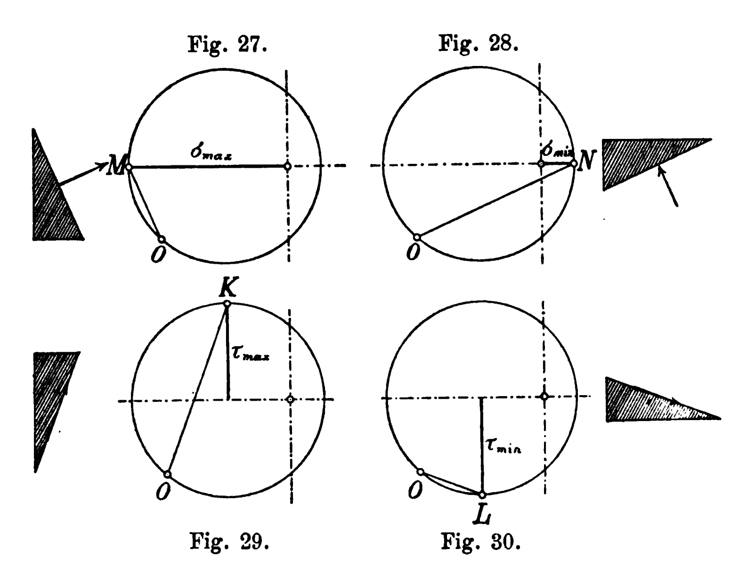
Dreht man nun den zur Schnittrichtung parallelen Strahl OF um O, so beschreibt der Punkt F den ganzen Kreis und seine Coordinaten $\sigma' a$ und $\tau' a$ machen dabei folgende Wandlungen durch:

Schneidet man das Material in der Richtung OM, so erhält man das Maximum, schneidet man es parallel ON, das Minimum von σ'; diese beiden Schnittrichtungen stehen stets aufeinander senkrecht und geben die Axenrichtungen der Spannungsellipse an. Schnitte parallel OK und OL sodann liefern das Maximum und das Minimum von τ'; auch diese stehen aufeinander senkrecht und bilden überdies mit den beiden erstgenannten Richtungen Winkel von 45°. In den Figuren 27 bis 30 sind die Schnitte nach diesen vier Hauptrichtungen besonders herausgezeichnet worden.

Es geht ferner aus der Figur 26 hervor, dass in den Schnitten, welche auf das Maximum und Minimum der Normalspannung führen, niemals transversale Spannungen wirken; diese Schnitte werden daher nur normal beansprucht. Die beiden andern Schnitte OK und OL dagegen, welche die grösste Schubspannung erfahren, werden zugleich auch von normalen Kräften beansprucht.

Schneidet man das Material in der Richtung OP oder OQ,

so verschwindet σ'; diese Schnitte sind daher diejenigen, welche nur transversal beansprucht werden. Sie bilden zugleich nach früher (Nr. 3 — 5) die Doppelstrahlen in der Involution der conjugirten Kräfte und Schnitte. Ferner schneidet jede Linie durch den Pol J der Linie PQ den Kreis in zwei Punkten, welche mit O verbunden ein neues Paar involutorischer Strahlen liefern.



Da die eine Kathete des Elementendreiecks nur transversal in Anspruch genommen wird, so liegt der Punkt U stets innerhalb des Kreises; die Construction kann daher nie derselben Art wie die der Figur 10, Seite 16, sein, sondern ist jederzeit der Art von Figur 11, Seite 18. Die Involution der conjugirten Schnittrichtungen ist demnach stets hyperbolisch; das heisst sie besitzt reelle Doppelstrahlen. In unseren Balken gibt es daher an jedem Punkte Schnitte, die ausschliesslich Scherspannungen auszuhalten haben, sowie solche, die bloss auf Zug, und solche, die bloss auf Druck beansprucht werden. Die auf Zug beanspruchten Schnitte werden durch die Doppelstrahlen von denjenigen getrennt, welche Druck erfahren.

Um die Maxima und Minima der Spannungen, sowie die Richtungen der genannten ausgezeichneten Schnitte rasch zu finden, genügt es, von einem Punkte aus $^1/_2\,\sigma$ und τ als Kräfte in irgend einem Massstabe aneinander zu reihen und mit deren Mittelkraft

als Radius einen Halbkreis zu zeichnen. Man erhält dann die Figur 31. In dieser entspricht der Ausgangspunkt A dem Kreismittelpunkte der Figur 26; die Strahlen OM und ON geben die Richtungen der Schnitte an, auf welche die grössten Normalkräfte wirken, die den rechten Winkel halbirenden Strahlen die Richtungen, in denen die grössten Schubkräfte wirken. Der Radius des Halbkreises stellt die grösste Transversalspannung dar; er ist gleich $\sqrt{{}^1/_4\,\sigma^2 + \tau^2}$. Die grösste Normalspannung wird, da in der Figur 26 D und U in Bezug auf den Kreismittelpunkt symmetrisch liegen, durch $DN = {}^1/_2\,\sigma + \sqrt{{}^1/_4\,\sigma^2 + \tau^2}$, die kleinste durch $DM = {}^1/_2\,\sigma - \sqrt{{}^1/_4\,\sigma^2 + \tau^2}$ dargestellt; beide Werte haben stets entgegengesetzten Sinn, und zwar der absolut grössere denjenigen des gegebenen σ.

Wirkt σ auf Druck, so hat man es von A aus nach rechts hin aufzutragen; ebenso kann τ, je nach der Richtung der Transversalkraft Q auf- oder abwärts gerichtet sein.

In der praktischen Ausführung dieser Construction braucht der Halbkreis nicht ausgezogen zu werden; es genügt, die Punkte M und N mit dem Zirkel zu markiren. Auch die Richtungen von O nach M und N braucht man bloss durch kurze Striche anzudeuten.

Fig. 31.

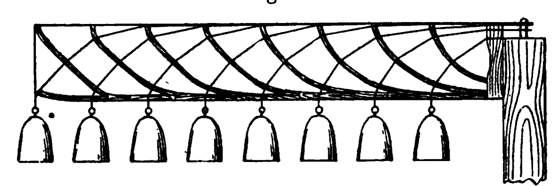
Parallel zu den Linien OM und ON laufen nun an jedem Punkte des Balkens die Zug- und Druckkurven. Hat man auf einer der cylindrischen Schalen, beziehungsweise in dem die Kraft Q enthaltenden Längsschnitt für eine genügende Zahl von Punkten diese Richtungen bestimmt und aufgetragen, so lassen sich einzelne dieser Kurven nach dem Augenmass einzeichnen. Wo es nötig ist, bestimmt man durch Interpolation noch weitere Richtungen. Wo eine Zugkurve auf eine Druckkurve trifft, schneidet sie diese stets unter rechtem Winkel. Ueberdies gehen aus der Figur 31 noch folgende Gesetze hervor:

Ist an irgend einer Stelle τ gleich null, so verschwindet auch das Minimum von σ und die Trajectorie läuft parallel zur Balkenaxe. Solche Stellen finden sich, wenn Torsionskräfte vorhanden sind, in den jeweiligen Grundpunkten; wenn das Torsionsmoment fehlt, an den beiden von der neutralen Axe entferntesten Punkten jedes Querschnittes und überdies in sämtlichen Punkten des Maximal-

momentenquerschnittes. Wird an einer Stelle σ gleich null, so bilden die Kurven mit der Balkenaxe Winkel von 45°; dieses trifft stets in der neutralen Axe und in denjenigen Querschnitten ein, welche kein Biegungsmoment auszuhalten haben.

Unschwer lassen sich auch die Kurven ziehen, welche den Schnitten folgen, in denen die Schubspannung ein Maximum ist, sowie diejenigen, längs welchen ausschliesslich Schubspannungen wirken. Erstere bilden mit den Zug- und Druckkurven fortwährend Winkel von 45°; von letzteren läuft die eine Schar parallel zur Balkenaxe, und die Kurven der andern Schar sind dadurch bestimmt, dass sie mit den Zug- und Druckkurven denselben Winkel einschliessen, wie diese mit der Richtung der Balkenaxe. Sind die Linien der grössten und kleinsten Normalspannungen für einen Balken gezeichnet, so lassen sich daher auch die übrigen Kurven ohne weitere Vorbereitungen ziehen.

Fig. 32.



Um einen klaren Begriff von der Uebertragung der Kräfte durch die Zug- und Druckkurven zu geben, haben wir das durch die Figur 32 dargestellte Modell eines an einem Ende eingespannten Balkens anfertigen lassen. Die Zugkurven sind durch Blechstreifen, die Druckkurven durch Holzklötzchen gebildet. Die Spannung nimmt in beiden Teilen nach rechts hin zu, und zwar, wie man leicht übersieht, dadurch, dass in jedem Knotenpunkte die kreuzende Kurve um einen kleinen Winkel abgelenkt wird. Setzt man zwei Balken von der Form der Figur 32 mit ihren hinteren Enden zusammen, so dass sich die Kräfte je zweier entsprechender Kurven aufheben, und kehrt man das Ganze um, so dass die gezogenen Kurven unten, die gedrückten oben liegen, so erhält man das Bild eines über eine Oeffnung gelegten und an beiden Endpunkten gestützten Balkens. Ein solcher Träger hat grosse Aehnlichkeit mit einem Fachwerke und es dient dies zur Bestätigung der allbekannten Thatsache, dass unsere Fachwerkbrücken Constructionen von hoher Zweckmässigkeit sind.

19. Die seitlichen Oberflächenkräfte.

In den bisherigen Betrachtungen über die Spannungen, welche im Innern von belasteten Balken auftreten, ist stets nur von dem Einflusse der ausserhalb des Querschnittes wirkenden Kräfte P und Q die Rede gewesen. Wir haben dabei eine Klasse von Spannungen unberücksichtigt gelassen, welche stets auftritt, wenn der Balken auf Biegung in Anspruch genommen wird. An den Stellen nämlich, an welchen die auf den Balken einwirkenden äusseren Kräfte (aufgelegte Lasten und Auflagerdrücke) dessen Oberfläche berühren, müssen notwendig quer zur Balkenaxe (in der Regel vertical) gerichtete Spannungen entstehen, die zu den bisher abgeleiteten Spannungen hinzutreten. Es sind dieses fast ohne Ausnahme Druckspannungen; denn wenn auch die Lasten, welche der Balken zu tragen hat, unter Umständen nicht aufgelegt, sondern aufgehängt werden, so kann doch der hierbei entstehende Zug nur durch ein Zwischenglied auf die Balkenoberfläche übergehen und wird sich an der Angriffsstelle stets als Druck äussern.

In zahlreichen Fällen ist der Einfluss dieser seitlichen Oberflächenkräfte geringfügig und kann ohne weiteres vernachlässigt werden; in anderen Fällen dagegen, besonders wenn die Lasten concentrirt angreifen, können diese neuen Spannungen eine ganz beachtenswerte Grösse erreichen.

Es ist zunächst klar, dass an den Angriffsstellen der äusseren Kräfte Druckspannungen entstehen, deren Grösse man findet, wenn man diese Kräfte über die Angriffs- oder Berührungsfläche verteilt. An der gegenüberliegenden Seite des Balkens wird die oberflächliche Spannung in der Regel null sein. Wie sich die Spannung dazwischen ändert, soll nun näher geprüft werden.

Wir denken uns durch den Balken zwei benachbarte Querschnitte gelegt, welche eine Scheibe von der Dicke Δx herausschneiden. (Vgl. Figur 20, Seite 62.) Ueber diesem Elemente ruhe die Last $\Delta L = p \,.\, \Delta x$, worin p die auf die Längeneinheit der Balkenaxe bezogene Belastung bedeutet. Legt man nun wie früher durch dieses Balkenelement einen zur Balkenaxe parallelen Schnitt $ABB'A'$ derart, dass im Querschnitte AB der Richtung von Q conjugirt ist, so findet man die auf diese Schnittfläche wirkende Druckkraft, indem man die auf das abgetrennte Balkenstück

wirkenden, zu Q parallel gerichteten Kräfte ins Gleichgewicht bringt. Diese Kräfte sind die von oben wirkende Belastung, die von unten wirkende gesuchte Druckkraft und die in den Querschnittsflächen wirkenden Transversalspannungen. Bezeichnet man die gesuchte Spannung, auf die Flächeneinheit bezogen, mit (σ), so ist die gesamte, auf die Fläche $A B B' A'$ wirkende Kraft gleich $(\sigma) . z . \Delta x$. Nennt man ferner die Schubspannung in einem beliebigen Flächenelemente des vordern Querschnittes τ, diejenige des hintern Schnittes τ', die Ordinate der Linie $A B$ wie früher y und die Ordinate des obersten Flächenelementes e, so ist (vgl. Nr. 15, Seite 63)

$$\tau = \frac{Q . S}{J . z} \text{ und } \tau' = \frac{Q' . S}{J . z},$$

worin J das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes bedeutet und

$$S = \sum_y^e y . \Delta F,$$

gleich dem statischen Momente des über $A B$ liegenden Teiles der Querschnittsfläche, bezogen auf die Schwerlinie $N N$, ist. Das Gleichgewicht der Kräfte verlangt nun die Beziehung

$$p . \Delta x - (\sigma) . z . \Delta x + \sum_y^e \tau . \Delta F - \sum_y^e \tau' . \Delta F = 0.$$

Führt man obige Ausdrücke für τ und τ' ein und berücksichtigt, dass $Q' - Q$ gleich der auf das Balkenelement entfallenden Belastung, also gleich $p . \Delta x$ ist, und dass ferner $\frac{\Delta F}{z}$ durch Δy ersetzt werden darf, so ergibt sich

$$(\sigma) = \frac{p}{z}\left(1 - \sum_y^e \frac{S . \Delta y}{J}\right).$$

Um den hier auftretenden Summenausdruck in eine fasslichere Form überzuführen, machen wir uns die auf der Tafel 2 dargestellte Construction des Trägheitsmomentes einer ebenen Figur zu Nutze. Wie schon auf der Seite 65 erklärt worden ist, kann man den Figuren 2—4 dieser Tafel die Werte S und J entnehmen, und zwar ist

$$S = a b \sum_y^e \Delta s$$

und

$$J = a b c t.$$

Hiernach wird

$$(\sigma) = \frac{p}{z}\left(1 - \sum_y^e \left(\frac{\Delta y}{c . t} \sum_y^e \Delta s\right)\right).$$

Nun stellt aber, wie wir auf der Seite 66 gezeigt haben, der Ausdruck $\frac{\Delta y}{c} \Sigma \Delta s$ die horizontale Projection der einzelnen Seiten des zweiten Seilpolygons (Figur 4) dar; wenn man daher diese Projectionen von y bis e summirt, so erhält man die auf der Tafel mit t_y' bezeichnete Strecke. Bezeichnet man schliesslich noch die Differenz $t - t_y'$ mit t_y, so ergibt sich die einfache Beziehung

$$(\sigma) = \frac{p \cdot t_y}{z \cdot t}.$$

Die Spannung (σ) ist stets parallel zur Querkraft Q gerichtet und trifft daher die Schnittfläche $ABB'A'$ im Allgemeinen unter schiefem Winkel. In der Praxis fällt jedoch die Richtungslinie von Q fast ausnahmslos mit einer Axe der Centralellipse zusammen; dann wirkt die Spannung selbstverständlich normal zur Schnittfläche.

Man sieht aus obiger Gleichung, dass der Einfluss der seitlichen Oberflächenkräfte in einfacher Weise durch das zweite Seilpolygon dargestellt wird; die Abscissen dieses Seilpolygons, bezogen auf die letzte Seite desselben, stellen, mit dem constanten Werte $\frac{p}{t}$ multiplicirt, das Produkt $(\sigma).z$ dar. Bei constanter Breite z ist die Spannung (σ) der Abscisse t_y direct proportional und nimmt daher von oben nach unten fortwährend ab. Hat die Querschnittsfigur dagegen wechselnde Breite, so kann die Spannung an einer Zwischenstelle leicht beträchtlich grösser ausfallen als an der Oberfläche. Namentlich in den Stegen der I-Balken (auch der Eisenbahnschienen) und bei concentrirter Belastung (das heisst bei grossem p) nimmt die Spannung (σ) oft ziemlich hohe Werte an, und es erhellt hieraus, dass man gut thut, die dünnen Stege der als Schwellenträger dienenden Blechbalken unter jeder Schwelle durch ein Pföstchen zu verstärken. Bei verteilter, namentlich bei gleichförmig verteilter Belastung dagegen darf man diese quer zur Balkenaxe gerichteten Spannungen in den Berechnungen der Praxis meistens unberücksichtigt lassen.

Will man unter Berücksichtigung der Oberflächenkräfte die in schiefen Schnitten wirkenden Spannungen und deren grösste und kleinste Werte bestimmen, so erfahren die Betrachtungen der vorigen Nummer einige Abweichungen. Zu den Kräften, welche das dreieckige Element der Figur 25 beanspruchen, kommt dann noch eine auf die horizontale Seite wirkende Normalkraft hinzu. Wie sich hiernach

die Figur 31 gestaltet, kann entweder direct wie in der vorigen Nummer, oder unter Verwendung der in der Nummer 6 (S. 21) angestellten Betrachtungen abgeleitet werden. Wir beschränken uns darauf, zu bemerken, dass man (vgl. Fig. 31) von einem beliebigen Punkte A aus beide Spannungen, σ sowohl als (σ), in horizontaler Richtung aufträgt, am Endpunkt der letzteren τ anfügt und durch den Endpunkt von τ einen Halbkreis zeichnet, dessen Mittelpunkt die Differenz der beiden Normalspannungen halbirt. Die Endpunkte des Halbkreises bestimmen dann wie oben mit dem Punkte A die grösste Zug- und die grösste Druckspannung; der Radius des Halbkreises stellt die grösste Scherspannung dar, und wenn man die Halbkreisenden mit dem Endpunkte von τ verbindet, so erhält man die Richtungen von σ_{max} und σ_{min} oder, was dasselbe ist, die Richtungen der Spannungstrajectorien.

Drittes Kapitel.

Construction der inneren Kräfte an verschiedenen Beispielen.

20. Balken mit rechteckigem Querschnitt.

Wenn die auf die Querschnittsflächen eines Balkens wirkenden äusseren Kräfte die Balkenaxe sämtlich schneiden, das heisst wenn das Torsionsmoment fehlt, so gibt man dem Balken in der Regel einen rechteckigen Querschnitt, wenn er aus Holz besteht, dagegen einen doppel-T-förmigen oder einen dem ähnlichen, wenn man in Eisen construirt. Im letzteren Falle werden die inneren Kräfte, wenn man sich nicht auf die einfachsten Aufgaben beschränken will, am besten auf graphischem Wege bestimmt; im ersteren dagegen ist es gewöhnlich einfacher, die Spannungen im Innern des Balkens als Function der wenigen vorkommenden Dimensionen auszudrücken und mit Hülfe dieser zu berechnen.

In der Praxis liegt die ausserhalb eines Schnittes angreifende Kraft in weitaus den meisten Fällen in einer der beiden Symmetrieebenen des Rechteckes. Dann wird die neutrale Axe im Querschnitt stets zu einer der Seiten parallel laufen und auf der Verbindungslinie des Angriffspunktes mit dem Schwerpunkte senkrecht stehen. Nennt man nun die zur neutralen Axe parallele Seite des Rechteckes b, die andere h, so ist der Flächeninhalt des Querschnittes gleich $b\,h$, das Trägheitsmoment (vergleiche den ersten Band von Culmanns graph. Statik) gleich $^1/_{12}\, b\,h^3$ und die Entfernung der äussersten Kante vom Schwerpunkte gleich $^1/_2\, h$. Eine im Schwerpunkt angreifende Normalkraft P ruft daher im ganzen Schnitt eine Spannung

$$\sigma_1 = \frac{P}{b\,h}\,.$$

hervor, und ein in der zu h parallelen Mittelebene wirkendes Kräftepaar M bewirkt in den äussersten Kanten die Spannung

$$\sigma_2 = \frac{M\,.\,e}{J} = \frac{6\,M}{b\,h^2}.$$

Wirken beide Kräfte zugleich, so bestimmt man den Einfluss von jeder einzeln und summirt sie, oder man wendet den auf der Seite 56 gesperrt gedruckten Satz an.

Bringt man obige Gleichung auf die Form

$$b\,.\,h^2 = \frac{6}{\sigma}\,.\,M,$$

so eignet sie sich, für den Fall, dass das Biegungsmoment bekannt und die Dimensionen des Querschnittes gesucht sind, sehr gut zur Lösung mittelst des Rechenschiebers. Da σ in der Regel als «zulässige Spannung» gegeben ist, so kann man $\frac{6}{\sigma}$ von vornherein berechnen und als eine bekannte Zahl betrachten; dann genügt zur Bestimmung der Dimensionen eine einzige Stellung des Rechenschiebers. Man kehrt die Zunge des Schiebers um, bringt in den beiden oberen Scalen die beiden Glieder rechts vom Gleichheitszeichen zur Deckung und kann dann in den beiden unteren für jedes b das entsprechende h oder umgekehrt ablesen.

Ist beispielsweise ein Balken von 7 m lichter oder 7,4 m theoretischer Spannweite zu berechnen, der auf den laufenden Meter eine gleichförmig verteilte Last von 0,28 Tonnen (Eigengewicht inbegriffen) zu tragen hat, und soll die grösste Spannung nicht mehr

als 0,07 Tonnen pro cm^2 betragen, so findet sich zunächst das Biegungsmoment (gleichfalls mit dem Schieber berechnet)

$$M = {}^1/_8\, q\, l^2 = {}^1/_8 \,.\, 0{,}28 \,.\, 7{,}4^2 = 1{,}917\ mt = 191{,}7\ cmt$$

und

$$\frac{6}{\sigma} = \frac{6}{0{,}07} = 85{,}7.$$

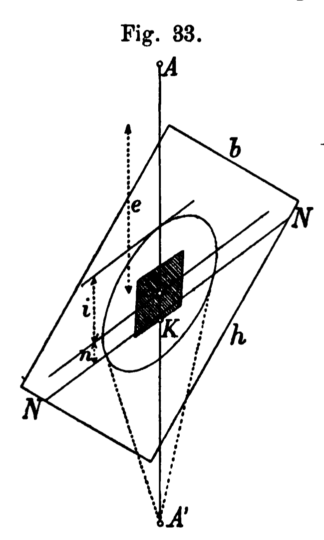
Stellt man nun die umgekehrte Zunge so, dass in den oberen Teilungen die Zahlen 1,917 und 8,57 übereinander stehen, so entsprechen sich auf den unteren folgende, den Anforderungen genügende Werte (auf Centimeter abgerundet)

$b =$	15	16	17	$19^1/_2$	21	$22^1/_2$	$25^1/_2$	$28^1/_2$	31 cm
$h =$	33	32	31	29	28	27	$25^1/_2$	24	23 cm

Man sieht, dass man durch eine einzige Schieberstellung gleich eine ganze Reihe von Lösungen erhält. Bezüglich der Charakteristik ist zu bemerken, dass man am besten diejenige von M um 2 und diejenigen der übrigen Grössen um 1 vermindert; oder mit andern Worten: Drückt man das Biegungsmoment in Metertonnen aus und dividirt die Zahl $\frac{6}{\sigma}$ durch 10, so erhält man die Dimensionen b und h in Decimetern.

Bei dieser Rechnung haben wir einen Schieber vorausgesetzt, dessen drei obere Teilungen gleichen Logarithmenmassstab besitzen, während die vierte in doppeltem Massstab aufgetragen ist. Verwendet man einen sogenannten Mannheim'schen Schieber, welcher zwei Doppelscalen enthält, so hat man bei der Multiplication der zwei gegebenen Zahlen von der Coulisse Gebrauch zu machen.

Fig. 33.



Nur in seltenen Fällen wird der Angriffspunkt der Kraft P ausserhalb einer der Symmetrieaxen des Querschnittes liegen. In diesem Falle construiren wir (Fig. 33) zunächst die neutrale Axe, indem wir den Angriffspunkt A auf die andere Seite vom Schwerpunkt, nach A' verlegen, von hier aus zwei Tangenten an die Centralellipse legen und deren Berührungspunkte verbinden. Die Spannung in der

äussersten (obersten) Kante wird hierauf bestimmt, indem man durch S eine Parallele zur neutralen Axe legt und, parallel zu AS, die Entfernung e der äussersten Kante, die Entfernung n der neutralen Axe und den Trägheitshalbmesser i abgreift; dann ist nach der Gleichung (5) auf der Seite 54, wenn das Moment der Kraft P in Bezug auf S mit M bezeichnet wird,

$$\sigma = \frac{M(e+n)}{J},$$

worin $J = F i^2$ zu setzen ist.

Noch rascher findet man σ unter Benützung des Satzes: Die grösste Spannung ist gleich dem Kernmoment, dividirt durch das Widerstandsmoment. (Seite 56.) Hiernach ergibt sich

$$\sigma = \frac{P \,.\, AK}{J : e} = \frac{P \,.\, AK}{F \,.\, SK}.$$

Der Querschnitt wird nach früher (Seite 58) am tragfähigsten, wenn die grössere Diagonale des Centralkerns mit der Richtung AS zusammenfällt; dagegen trägt er am wenigsten, das heisst σ wird am grössten, wenn AS mit einer Seite des Kernes einen rechten Winkel bildet, und nicht etwa, wenn die andere Diagonale in die Linie AS fällt.

Reducirt sich P auf eine unendlich ferne Kraft (ein Kräftepaar), welche im unendlich fernen Punkte von AS angreift, so fällt die neutrale Axe mit der Schwerlinie zusammen und n verschwindet. Dann wird einfacher

$$\sigma = \frac{Me}{J} = \frac{M}{F \,.\, SK}.$$

Die transversale Spannung im Querschnitt wird nach der Gleichung (14), Seite 64, berechnet. Wirkt Q in einer der Symmetrieaxen des Querschnittes, so ist τ', da die Breite z constant bleibt, dem statischen Momente $\sum_y^e y \,.\, \Delta F$ proportional und die querlaufenden Schubspannungen τ'' (Seite 69) werden null.

Für einen Punkt, welcher von der zu Q normalen Schwerlinie um y absteht, wird das obige statische Moment gleich

$$b(e-y)\frac{e+y}{2} = {}^1/_2\, b(e^2-y^2) = {}^1/_8\, b(h^2-4y^2),$$

folglich

$$\tau' = \frac{3Q(h^2-4y^2)}{2bh^3}.$$

Trägt man diese Werte von einer Verticalen aus in horizontaler Richtung auf, so entsteht eine Parabel mit horizontaler Axe. In der obersten und untersten Kante ist die Schubspannung wie immer null; in der Schwerlinie wird sie ein Maximum und zwar

$$\tau_s = \frac{3\,Q}{2\,b\,h}.$$

Um daher beim Rechteck die grösste Schubspannung zu finden, verteilt man die Schubkraft über $^2/_3$ des Querschnittes. (Auf das nämliche Ergebnis führt der auf der Seite 68 oben stehende Satz.)

Der Fall, wo die Kraft Q die Seiten des Rechteckes schiefwinklig schneidet, ist verwickelter und wird am besten auf graphischem Wege geprüft, nach Methoden, die wir später an unregelmässigen Profilen erläutern werden.

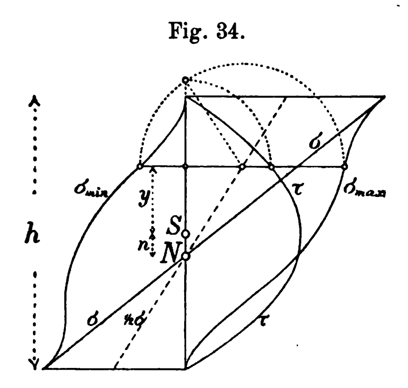
Vereinigt man nun noch die σ und τ für den Fall, dass Q parallel zu h wirkt, auf die in der Nummer 18 beschriebene Weise, indem man sich das Material schief und zwar in der Richtung der Zug- und Druckkurven geschnitten denkt, so gelangt man zu folgenden Resultaten:

Die normale Spannung σ wird (Figur 34) durch eine gerade Linie dargestellt und ergibt sich für einen Punkt im Abstand y

$$\sigma = \frac{M\,(y + n)}{J} = \frac{12\,M\,(y + n)}{b\,h^3}.$$

Die Darstellung der transversalen Spannung führt, wie schon gesagt, zu einer Parabel.

Fig. 34.



Bildet man nun an jeder Stelle aus $^1/_2\,\sigma$ und τ ein rechtwinkliges Dreieck, so ist dessen Hypotenuse gleich τ_{max}, und fügt man diesen Wert (vergleiche Figur 31) an $^1/_2\,\sigma$ an, so bekommt man σ_{max}.

In der Figur 34 ist nun zunächst eine gestrichte Linie gezogen worden, welche sämtliche σ halbirt; hierauf wurden die τ um einen rechten Winkel gedreht, so dass sie in die verticale Axe zu stehen kamen. Ein Halbkreis, dessen Mittelpunkt auf der gestrichten Geraden liegt, und dessen Halbmesser gleich τ_{max} ist,

führte sodann zu den Werten σ_{max} und σ_{min}. Aus der Verbinaung der Halbkreisendpunkte entstanden die beiden ausgezogenen, mehrfach gekrümmten Kurven; im Verein mit der verticalen Axe stellen sie die Grenzwerte der normalen Spannungen dar; ihre Horizontalentfernungen von der gestrichten Geraden ergeben dagegen die grössten Schubspannungen.

Aus der Beziehung $\sigma_{max} = \frac{1}{2}\,\sigma + \sqrt{\frac{1}{4}\,\sigma^2 + \tau^2}$ (Seite 80) ergibt sich für diese Kurven die Gleichung

$$\sigma_{max}\,(\sigma_{max} - \sigma) = \tau^2.$$

Da σ in Bezug auf y vom ersten und τ vom zweiten Grade ist, so liegen die Endpunkte der σ_{max} auf einer Kurve vom vierten Grade. Die graphische Construction dieser Kurven wird daher selbst in diesem einfachsten Falle der Rechnung vorzuziehen sein.

21. Verzahnte hölzerne Balken.

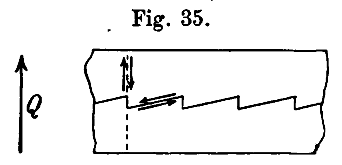
Da die Dicke der hölzernen Balken in der ganzen Höhe constant bleibt, so wird die Schubspannung τ selbst in der Schwerlinie selten eine über das zulässige Mass hinausgehende Grösse annehmen, trotzdem die Schubfestigkeit des Holzes in der Richtung der Fasern bekanntlich weit geringer ist, als seine Zug- und Druckfestigkeit. Die Berechnung der Schubspannungen gewinnt aber an Bedeutung, wenn es sich um verzahnte Balken handelt.

Die Zähne haben den Zweck, die horizontal gerichteten Schubspannungen aufzunehmen, welche in den Berührungsflächen der einzelnen Stämme wirken, aus denen ein verzahnter Balken zusammengesetzt ist. Werden zwei Stämme unverzahnt übereinander gelegt und auf Biegung beansprucht, so finden die in der Trennungsfläche wirkenden Schubkräfte, abgesehen von der meist ungenügenden und unzuverlässigen Reibung, welche die Verschraubung bewirkt, keinen Widerstand; die sich berührenden Teile gleiten übereinander weg und die beiden einzelnen Balken tragen nicht mehr, als wenn sie nebeneinander lägen.

Daraus folgt nun zunächst, dass die Richtung der Zähne von der Richtung der Transversalkraft Q abhängt. Ist diese (als Mittelkraft der links vom Querschnitt angreifenden Kräfte betrachtet) wie in der Figur 35 aufwärts gerichtet, so hat sie das Bestreben, den links von einem Querschnitt liegenden Balkenteil an dem rechts

liegenden vorbei nach oben zu verschieben, wie dies in der Figur durch die zwei kleinen verticalen Pfeile angedeutet ist. Da (entsprechend der Figur auf der Seite 67) die Schubspannungen in Längsschnitten denjenigen im Querschnitte stets entgegengesetzt laufen, so folgt weiter, dass der obere Balken nach links, der untere nach rechts zu gleiten geneigt ist. Um diese Bewegung zu verhindern, müssen somit die Zähne nach rechts steigen.

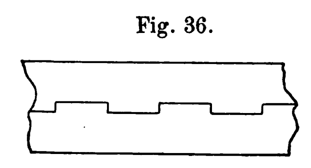
Fig. 35.



Da die Scherkraft bei einem einfachen, auf zwei Stützen ruhenden Balken verschiedene Richtung hat, je nachdem man sich links oder rechts von derjenigen Stelle befindet, an der das Moment ein Maximum wird, so kann man allgemein sagen: Die Zähne eines verzahnten Balkens müssen stets gegen den Maximalmomentenpunkt steigen.

Bekanntlich schwankt aber dieser Punkt bei denjenigen Balken, welche neben dem Eigengewichte auch zufällige Lasten zu tragen haben, hin und her, und zwar innerhalb einer bestimmten Strecke, welche im Verhältnis zur Spannweite um so grösser ist, je mehr die Verkehrslasten das tote Gewicht überwiegen. Innerhalb dieser Strecke sollten daher die Zähne nach beiden Richtungen wirken können und die Form der Figur 36 erhalten. Wenn gegen diese Regel gefehlt wird, ohne dass Nachteile daraus entstehen, so erklärt sich dieses dadurch, dass die von den Schraubenbolzen herrührende Reibung, sowie die benachbarten, richtig laufenden Zähne die Aufgabe der verkehrt stehenden auf sich nehmen.

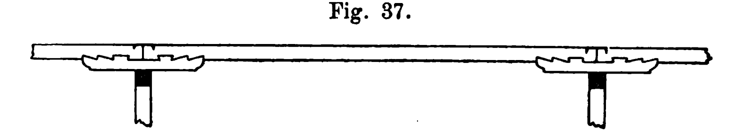
Fig. 36.



Bei continuirlichen Balken will es bisweilen durchaus nicht gelingen, die Richtung der Zähne aus der Richtung der Scherkraft abzuleiten. Die Zweideutigkeit rührt davon her, dass man mit der Verzahnung zwei Zwecke erreichen will. Soll zum Beispiel nach der Figur 37 ein Balken mit einem Sattel verbunden werden, so verlangt der über dem Auflager vorhandene Stoss des Hauptbalkens eine Verkämmung und dadurch eine andere Zahnrichtung als die Scherkraft, doch nur so lange, bis die Hauptbalken an ihren Enden zu einem Ganzen verbunden sind. Sobald dies geschehen ist — es

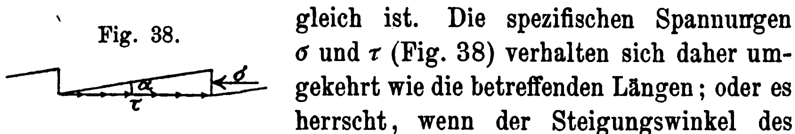
wird dieser Zweck auch durch Klammern befördert — können die Zähne wieder der durch die Scherkraft bestimmten Richtung folgen. Hierdurch ergibt sich die in der Figur 37 dargestellte Form der Verzahnung. Uebrigens wird man in solchen zweifelhaften Fällen gewöhnlich am besten thun, Verzahnungen anzuordnen, die nach beiden Seiten hin gleichmässig widerstehen können.

Fig. 37.



Um die Stärke der Verzahnung zu bestimmen, beachten wir, dass jeder Zahn an seiner senkrechten Fläche eine Druckkraft erfährt, welche der an seiner Grundfläche herrschenden Schubkraft gleich ist. Die spezifischen Spannungen σ und τ (Fig. 38) verhalten sich daher umgekehrt wie die betreffenden Längen; oder es herrscht, wenn der Steigungswinkel des Zahnes mit α bezeichnet wird, in der senkrechten Zahnfläche die Druckspannung

Fig. 38.



$$\sigma = \tau \,.\, cotang\, \alpha.$$

Die Spannung τ wird nach der auf der Seite 88 stehenden Formel bestimmt. Es ergibt sich nach dieser, wenn der verzahnte Balken aus zwei gleich hohen Teilen besteht, für $y = 0$

$$tang\, \alpha = \frac{3\, Q}{2\, b\, h\, \sigma}$$

und wenn derselbe aus drei Teilen zusammengesetzt wird, für $y = {}^1/_6\, h$

$$tang\, \alpha = \frac{4\, Q}{3\, b\, h\, \sigma}.$$

Je weiter die verzahnte Fläche von der horizontalen Mittellinie des Balkens absteht, und je mehr sich die Zähne dem Maximalmomentenpunkte nähern, desto flacher können sie geschnitten werden. Indessen wird man aus Gründen der Einfachheit in der Regel vorziehen, den Steigungswinkel nach dem grössten Q zu berechnen und constant durchzuführen. Ob man dabei besser zahlreiche kurze und niedrige Zähne oder weniger zahlreiche, aber dafür längere und höhere Zähne anbringt, ist vom statischen Standpunkt aus betrachtet gleichgültig und richtet sich allein nach praktischen Rücksichten.

Es mag interessant sein, noch zu bemerken, dass wenn man bei einem gleichförmig belasteten Balken die grösste Zug- und Druckspannung im Querschnitt und die grösste Druckspannung an der Zahnfläche gleich gross verlangt, die Zahnlinie parallel zur Diagonale der Ansichtsfläche des Balkens läuft. Denn wenn man das aus der Formel $\frac{1}{8} q l^2 = \frac{1}{6} \sigma b h^2$ berechnete σ dem obigen gleich und Q gleich $\frac{1}{2} q l$ setzt, so wird $tang\, \alpha = \frac{h}{l}$. Selbst bei unregelmässig belasteten Balken wird es vielfach gestattet sein, sich dieser einfachen Regel zu bedienen.

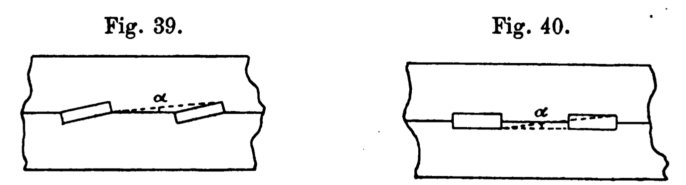


Fig. 39. Fig. 40.

Im Bisherigen ist stets von regelrechten Zähnen die Rede gewesen. Unsere Ergebnisse lassen sich aber auch ohne weiteres auf Dübel und Keile übertragen, welche genau dieselben Zwecke zu erfüllen haben. Eine Verdübelung nach Figur 39 entspricht Zähnen, die nach rechts steigen, und eine Verdübelung nach Figur 40 ersetzt nach beiden Seiten wirkende Zähne. In beiden Fällen ist der Winkel α in der Weise aufzufassen, wie es in den Figuren angedeutet ist. Alles übrige bleibt sich gleich.

22. Balken mit doppel-T-förmigem Querschnitt.

Wenn ein auf Biegung beanspruchter Balken aus Eisen hergestellt werden soll, so gibt es hierfür keine günstigere Querschnittsform, als das durch Walzen, oder durch Vernieten von Platten und Winkeleisen gebildete Doppel-T-Profil. Wie schon im ersten Bande von Culmanns Graphischer Statik bei der Vergleichung verschiedener Profile gezeigt worden ist, stellt sich der Wert $\frac{k}{\sqrt{F}} = \frac{J : e}{F^{3/2}}$ $\left(\text{in Worten: } \frac{\text{Kernradius}}{\sqrt{\text{Flächeninhalt}}} = \frac{\text{Widerstandsmoment}}{(\text{Flächeninhalt})^{3/2}}\right)$, welcher das Güteverhältnis eines Querschnittes ausdrückt, für das Doppel-T-

Profil weitaus am günstigsten. Je mehr Material an die obere und untere Kante gerückt wird, desto höher steigt das Trägheitsmoment und damit das Tragvermögen des Balkens. Es werden daher zwei ausgesprochene Anhäufungen, «Kopf» und «Fuss» gebildet, und das diese verbindende Zwischenglied, der «Steg» oder die «Mittelrippe» wird nur so dick ausgeführt, als die in ihm wirkenden Kräfte, sowie Rücksichten auf die Herstellbarkeit, auf das Rosten und andere ausserstatische Umstände verlangen.

Kopf und Fuss werden hierbei in den meisten Fällen aus nahe liegenden Gründen genau gleich geformt. Ausnahmen von dieser Regel kommen nur vor, wenn die Natur der zu tragenden Lasten (wie zum Beispiel bei Eisenbahnschienen) oder besondere Nebenzwecke sie verlangen, oder falls ein Material (zum Beispiel Gusseisen) verwendet wird, dessen Zug- und Druckfestigkeit stark voneinander abweichen.

Das Trägheits- und das Widerstandsmoment eines Doppel-T-Profils in Bezug auf seine horizontale Schwerpunktsaxe bestimmt man, wenn es genau sein soll, in der Regel am schnellsten auf graphischem Wege. Nur wenn die Querschnittsfigur lauter gerade Linien und rechte Winkel besitzt, oder wenn dieselbe ohne merklichen Fehler in eine solche Figur übergeführt werden kann, ist die Zahlenrechnung vorzuziehen. In der Praxis wird jedoch selten vollkommene Genauigkeit verlangt und unter dieser Bedingung empfiehlt sich das folgende, von den Technikern meistens angewendete Verfahren:

Man teilt das Profil in Kopf, Fuss und Steg ein, berechnet deren Flächeninhalte F_1 und F_2 (siehe Figur 41) und bestimmt die Schwerpunkte von Kopf und Fuss. Nennt man dann die Entfernung dieser Punkte h_s, so sind die Trägheitsmomente der beiden ersteren Teile um ein Geringes grösser als $F_1\,(^1/_2\,h_s)^2$; der Steg ist ganz oder nahezu ein Rechteck und sein Trägheitsmoment ziemlich genau gleich $\frac{1}{12}\,F_2\,h_s^2$. Daraus ergibt sich das Trägheitsmoment des ganzen Profils

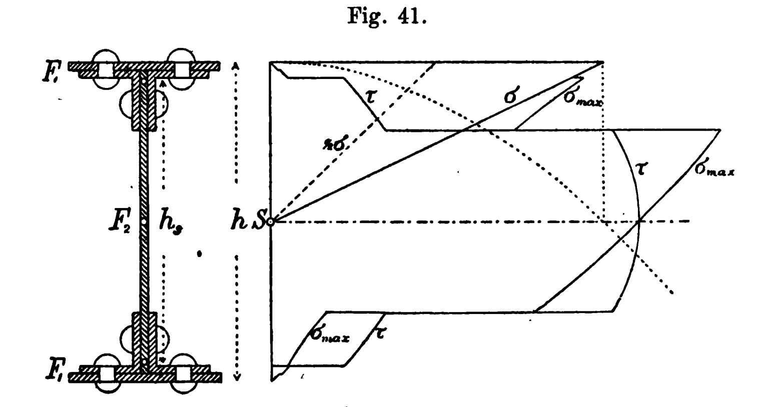
$$J = {}^1/_2\,F_1\,h_s^2 + {}^1/_{12}\,F_2\,h_s^2 = {}^1/_2\,(F_1 + {}^1/_6\,F_2)\,h_s^2.$$

Bezeichnet man nun noch die ganze Höhe des Trägers mit h, so wird das Widerstandsmoment

$$W = \frac{J}{e} = (F_1 + {}^1/_6\,F_2)\,\frac{h_s^2}{h}.$$

Da die Flächeninhalte der einzelnen Platten und Winkeleisen, aus denen sich ein Blechbalken zusammensetzt, von vornherein bekannt sind oder doch leicht bestimmt werden können, so verursacht die Anwendung dieser Annäherungsformel wenig Mühe und Zeitaufwand und ist um so eher gestattet, als sie meistens etwas zu kleine Werte für W liefert. Am meisten Umstände verursacht die Bestimmung der Schwerpunkte; doch da keine volle Genauigkeit nötig ist, so wird sich ein geübter Rechner hierfür leicht einen Annäherungsweg zurecht legen oder sich einfach der Schätzung bedienen. Verschwächungen durch Nietlöcher können ohne Schwierigkeit berücksichtigt werden.

Fig. 41.



Ist das Widerstandsmoment eines Balkens, sowie das Biegungsmoment, dem er ausgesetzt ist, bekannt, so bildet die Bestimmung der in der äussersten Kante herrschenden Normalspannung eine einfache Divisionsaufgabe.

Ueber die Bestimmung des Trägheitsmomentes bezüglich der verticalen Axe ist nichts besonderes zu bemerken; je nach der Profilform wird der graphische oder der rechnerische Weg bequemer sein.

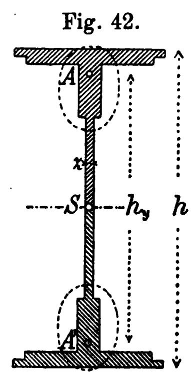
Sollte der Angriffspunkt der Kraft P nicht in einer der Symmetrieaxen liegen, so wird die Spannung in der äussersten Kante am einfachsten durch Einzeichnen des Centralkerns und mit Hülfe des Satzes auf der Seite 56 ermittelt. Der Centralkern hat wie beim Rechteck die Form eines Parallelogramms.

Die Berechnung der an verschiedenen Stellen des Querschnitts wirkenden Schubspannung verursacht ziemlich viel Arbeit, so-

bald das Profil nicht zu den allereinfachsten gehört; das graphische Verfahren verdient daher hier den Vorzug. In den Nummern 25 und 27 ist dieses näher erläutert und auf den Tafeln 3 und 4 auf verschiedene Beispiele angewendet worden; wir wollen indessen an dieser Stelle vorgreifend erwähnen, dass die τ sich mehr oder weniger sprungweise ändern und ihre Kurve für einen Blechbalken die in der Figur 41 dargestellte, stark ausgebauchte Form annimmt. Diese Kurve zeigt, dass sich die transversale Spannung im Stege, soweit dieser nicht von den Winkeleisen eingeschlossen wird, nur wenig ändert; es kommt dies daher, dass das statische Moment der über einem horizontalen Schnitte liegenden Querschnittsfläche, bezogen auf die Schwerlinie, beinahe constant bleibt, so lange sich dieser Schnitt auf den Steg beschränkt.

In der Praxis begnügt man sich nun stets damit, die Scherspannung für die Steg m i t t e zu berechnen, wo sie am grössten ist. Nach den Erörterungen der Nummer 15 (S. 67) ist diese Spannung in einem beliebigen Horizontalschnitte gleich $\frac{Q}{z \cdot h_y}$, worin Q die gegebene Transversalkraft, z die Breite des Profils und h_y die Entfernung derjenigen zwei Punkte bedeutet, welche in den Centralellipsen der durch den Schnitt getrennten Querschnittshälften zur Schwerlinie antipolar liegen. Wenn nun, wie beim Doppel-T-Profil, das Material in Kopf und Fuss angehäuft ist, so fallen diese Antipole für einen durch die Mitte gelegten Schnitt in die Nähe der äussersten Kanten (s. Fig. 42), und man fehlt nicht gar viel, wenn man h_y durch die Höhe h des Profils ersetzt. In der That wird auch in der Praxis gewöhnlich die einfache Formel

Fig. 42.



$$\tau = \frac{Q}{z \cdot h}$$

verwendet.

Diese Formel ermöglicht es, die Stegdicke eines Doppel-T-Balkens statisch zu prüfen, beziehungsweise zu berechnen. Dabei wird jedoch aus Rücksicht auf die Knickgefahr, welche in der Richtung der Druckkurven eintritt, zuweilen auch aus Rücksicht auf concentrirte Oberflächenkräfte als «zulässige» Schubspannung stets ein kleinerer Wert gewählt, als da, wo ausschliesslich Schubkräfte thätig sind.

In zweiter Linie dient die Berechnung von τ dazu, die Entfernung zu bestimmen, in welcher Steg, Winkeleisen und Kopfplatten mit Nieten zu verbinden sind. Die Aufgabe dieser Verbindungsteile besteht darin, die Spannungsdifferenzen der zu verbindenden Stücke auszugleichen, mit anderen Worten, die Schubspannungen aufzunehmen. Würde man Winkeleisen und Horizontalbleche lose aufeinander legen, so glitte infolge der horizontalen Schubkräfte der eine Teil über den andern hinweg. Ganz dasselbe geschähe, wenn die den Steg mit dem Winkeleisen verbindenden Niete fehlten. Nennt man nun den Längsabstand zweier Niete n, so hat jeder Niet die auf die Fläche $n \,.\, z$ treffende Kraft, also $n z \tau = \frac{Q \,.\, n}{h}$ aufzunehmen, woraus sich bei gegebenem Durchmesser des Nietbolzens der Abstand n oder bei gegebenem Abstand der Nietdurchmesser leicht ermitteln lässt. Ob man hierbei, dem Wechsel von Q entsprechend, den Abstand veränderlich oder durchweg gleich dem kleinsten Abstande annimmt, hängt von constructiven Rücksichten ab. Uebrigens haben die Niete bekanntlich auch noch die Aufgabe, ein wellenförmiges Ausbiegen der Kopfplatten zu verhüten und ein sattes Schliessen der Fugen zu bewirken. —

Ausser den parallel zur Scherkraft Q gerichteten Scherspannungen hat der Querschnitt, wie in der Nummer 15 gezeigt worden ist, auch noch quer laufende Spannungen τ'' auszuhalten. Diese letzteren sind um so grösser, je mehr die Richtung der Randlinie von derjenigen der Scherkraft abweicht. Wo der Rand senkrecht zu Q, also bei vertical gerichtetem Q horizontal verläuft, ergäben sich diese Querspannungen nach unserer dort angestellten Betrachtung sogar unendlich gross. Da dieses Ergebnis nicht nur sehr unwahrscheinlich klingt, sondern auch der täglichen Erfahrung widerspricht, so folgt, dass unsere der dortigen Betrachtung zu Grunde gelegten Voraussetzungen nicht ganz richtig sein können. Namentlich betrifft dies die Annahme, dass die transversale Spannung in einer zu Q conjugirten Querlinie constant sei. Es ist auch in der That nicht wahrscheinlich, dass die Schubspannung da, wo die Breite z des Querschnittes plötzlich grösser wird, sich auch sofort gleichförmig über die grössere Breite verteile. Diese Verteilung wird vielmehr allmälig vor sich gehen, das heisst die Spannung wird in der Nähe plötzlicher Breitenänderungen in ein und derselben Querlinie ungleich ausfallen.

Ein weiteres Eingehen auf dieses Thema halten wir für unthunlich, da die Lösung der sehr verwickelten Frage zur Zeit noch aussteht. Doch dürfte es gut sein, aus Obigem den Rat zu entnehmen, schroffe Breitenänderungen, wo es die Construction ermöglicht, zu vermeiden. —

Wir haben in der Figur 41 (gleich wie in der Figur 34, Seite 89) aus den im Querschnitt herrschenden σ und τ noch die in schiefen Schnitten vorkommenden Maximalspannungen construirt, doch, um Platz zu sparen, nur die eine der beiden Kurven gezeichnet; die andere ist, da die neutrale Axe als durch den Schwerpunkt gehend angenommen wurde, der ersteren congruent. Diese Kurve verläuft wie diejenige der τ unregelmässig und sprungweise. Besonders zu beachten ist, dass sie eine Strecke weit grössere Werte aufweist, als in der obersten Kante des Querschnittes. In diesem Falle ist es, streng genommen, unstatthaft, sich bei der Berechnung der inneren Spannungen auf die Normalspannung in den äussersten Kanten und die Transversalspannung im Schwerpunkte zu beschränken.

Nun gibt es ein einfaches Mittel, um rasch zu erkennen, ob die Spannung in einem schiefen Schnitte grösser werden kann, als diejenige in der äussersten Kante. Es ist nach früher (S. 80)

$$\sigma_{\max} = {}^1/_2\,\sigma + \sqrt{{}^1/_4\,\sigma^2 + \tau^2}$$

oder

$$\sigma_{\max}\,(\sigma_{\max} - \sigma) = \tau^2.$$

Bezeichnet man die in der äussersten Kante herrschende Spannung mit σ_e, so ist $\sigma = \frac{y}{e} \,.\, \sigma_e$, folglich

$$\sigma_{\max}\left(\sigma_{\max} - \frac{y}{e} \,.\, \sigma_e\right) = \tau^2.$$

Soll nun $\sigma_{\max}$ nirgends grösser werden als σ_e, so muss τ^2 kleiner sein als $\sigma_e\left(\sigma_e - \frac{y}{e} \,.\, \sigma_e\right) = \sigma_e^2\left(1 - \frac{y}{e}\right)$ oder

$$\tau < \sigma_e \sqrt{1 - \frac{y}{e}}\,.$$

Trägt man die letzteren Werte von der Verticalen aus horizontal auf, so liegen ihre Endpunkte auf einer Parabel, welche im oberen Endpunkt der Verticalen ihren Scheitel hat und in der Höhe der

neutralen Axe $\pm \sigma_e$ abschneidet. Schneidet diese Parabel die Kurve der τ, so ist dies ein Zeichen, dass σ_{max} den Wert σ_e übersteigt. Da die Parabel rasch von Hand skizzirt werden kann, so bietet sie zur Entscheidung der Frage, ob die grösste Normalspannung am Endpunkte des Querschnittes oder an einer anderen Stelle eintritt, ein sehr einfaches Hülfsmittel.

In der Figur 41 haben wir diese Parabel punktirt eingezeichnet; man sieht, dass sie die Kurve der τ schneidet und zwar so weit innerhalb derselben verläuft, als die σ_{max} den Wert σ_e übertreffen.

In der Praxis kommt jedoch dieser Fall meistens nur da vor, wo das Biegungsmoment weit unter demjenigen Werte bleibt, den der Querschnitt aushalten könnte, wo, mit anderen Worten, die Spannung in den äussersten Kanten weit unter der «zulässigen» liegt, wie zum Beispiel bei frei aufliegenden Balken in der Nähe der Auflager. Je grösser die Normalspannung im obersten und untersten Punkte wird, desto weniger wird in der Regel die Kurve der σ_{max} ihren Endwert übersteigen. Gewöhnlich genügt es daher, die σ und τ, wie sie sich nach der üblichen Rechnungsweise im Querschnitte ergeben, zu berücksichtigen.

Eine Ausnahme hiervon bilden nur Träger mit ungewöhnlicher Höhe. Wir haben bei der Construction der Figur 41 das Biegungsmoment gleich der Scherkraft mal der Balkenhöhe angenommen; es entspricht dies dem Mittelquerschnitte eines Balkens, der eine Länge gleich der doppelten Höhe besitzt, an beiden Enden aufliegt und in der Mitte eine concentrirte Last trägt. Bei solch ungewöhnlich hohen Balken ist daher eine spezielle Untersuchung der in schiefen Schnitten wirkenden σ_{max} ratsam.

23. Maximalspannungen im Innern einer Eisenbahnschiene.

(Tafel 2.)

Um die Zusammensetzung der Zug- und Druckkräfte mit den scherenden Spannungen in einem Balken von unregelmässigem Querschnittsprofil zu erläutern, wählen wir ein Schienenprofil. Der Construction der σ und τ geht stets die graphische Bestimmung des Trägheitsmomentes voraus, wie sie im ersten Bande von Culmanns Graphischer Statik ausführlich erklärt worden ist, und unsere

jetzigen Entwickelungen können in gewissem Sinne als Fortsetzung und Ergänzung der dortigen betrachtet werden.*)

Auf der Tafel 2 ist zunächst in den Figuren 1—4 das Trägheitsmoment des in halber natürlicher Grösse aufgetragenen Profils für die horizontale Schwerpunktsaxe bestimmt worden. Das Profil wurde zu diesem Zwecke in 13 horizontale Streifen von gleicher Höhe geteilt und der Flächeninhalt jedes Streifens, durch die Verwandlungsbasis $a = 3\,cm$ dividirt, in der Figur 2 als horizontale Kraft Δr aufgetragen. Als Poldistanz b wurde indessen hier nicht die halbe Summe aller Δr, sondern die Strecke $6\,^2/_3\,cm$ gewählt, so dass das Produkt $a\,b$ die runde Zahl von $20\,cm^2$ ergab. Werden nämlich die inneren Spannungen im Anschluss an äussere Kräfte construirt, so ist es, um einen zweiten Kräftemassstab zu vermeiden, zweckmässig, die sämtlichen σ und τ mit einer abgerundeten Fläche zu multipliciren, und hierzu eignet sich in der Regel nichts besser als die Fläche $a\,b$. Handelt es sich dagegen nur um die Trägheitsellipse, so nimmt man b besser gleich der halben Summe aller Δr. In diesem Falle würden die Spannungen mit $^1/_2\,a\,r$, das heisst mit dem halben Flächeninhalt des Profils multiplicirt erscheinen, was im Allgemeinen unbequemer ist.

Die Construction der beiden Seilpolygone (Fig. 3 und 4), welche zur Bestimmung des Trägheitsmomentes dienen, setzen wir als bekannt voraus. Das erstere (Fig. 3) dient bekanntlich zunächst zur Bestimmung des Schwerpunktes, indem seine äussersten Seiten sich auf der Schwerlinie schneiden. Zugleich schneiden die einzelnen Seiten auf der Schwerlinie Strecken Δs ab, welche mit $a\,b$ multiplicirt den statischen Momenten der Lamellen gleich sind. Betrachtet man hierauf diese Strecken als Kräfte und setzt sie mittelst des Poles O_2 zu einem neuen Seilpolygone (Fig. 4) zusammen, so stellen dessen Abschnitte Δt die Trägheitsmomente der einzelnen Flächenteile dar. Nennt man die Poldistanz des zweiten Kräftepolygons c und den Gesamtabschnitt des zweiten Seilpolygons t, so ist endlich das Trägheitsmoment der ganzen Figur $J = a\,b\,c\,t$. Die Grösse c, welche im Allgemeinen beliebig ist, haben wir hier gleich e, gleich der Entfernung der obersten Profilkante vom Schwerpunkt

---

*) Auf der Tafel 12 der zweiten Auflage des genannten Werkes, welche die Bestimmung des Trägheitsmomentes eines Schienenprofils enthält, sind die hier beschriebenen Constructionen bereits vorgreifend beigefügt worden.

angenommen, so dass das Widerstandsmoment $\frac{J}{e}$ einfach gleich $a\,b\,t$ wird.

Aus dem Biegungsmomente, welchem der in Untersuchung stehende Querschnitt ausgesetzt ist, lässt sich nun nach den in der Nummer 13 abgeleiteten Beziehungen die Spannung σ finden, welche in der äussersten (obersten) Kante herrscht; sie betrage im vorliegenden Falle 0,5 t pro cm^2 oder mit $a\,b$ multiplicirt 10 t. Trägt man diese Kraft im Massstabe 4 mm = 1 t am oberen Ende der Schiene von der Symmetrieaxe horizontal nach rechts auf und zieht durch den Endpunkt und den Schwerpunkt des Profils eine gerade Linie, so bestimmt diese die an jeder Stelle herrschende Normalspannung. Eine zweite (punktirte) Linie, welche die sämtlichen $\sigma\,a\,b$ halbirt, enthält die Mittelpunkte der Halbkreise, durch deren Construction die in schiefen Schnitten herrschenden Maximalspannungen gefunden werden.

Um zweitens die Scherspannungen τ zu bestimmen, denken wir uns die Scherkraft Q gegeben; dann ist nach Nummer 15 (S. 63)

$$\tau = \frac{Q}{z\,.\,J}\,.\,\sum_y^e y\,.\,\Delta F.$$

Auf der Tafel 2 sind nun die statischen Momente der einzelnen Flächenstreifen construirt worden, und zwar ist für jeden derselben

$$y\,.\,\Delta F = a\,.\,b\,.\,\Delta s.$$

Soll dieser Wert von y bis e, das heisst von irgend einer Lamellengrenze bis an die äusserste (oberste) Kante summirt werden, so hat man einfach die betreffenden Δs zu addiren und deren Summe mit $a\,b$ zu multipliciren. Es ist daher beispielsweise für den Horizontalschnitt zwischen den Streifen 4 und 5

$$\sum_y^e y\,.\,\Delta F = a\,.\,b\,.\,s_{1-4}$$

und

$$\tau = \frac{Q}{z\,.\,J}\,.\,a\,.\,b\,.\,s_{1-4} = \frac{Q\,.\,s_{1-4}}{z\,.\,c\,.\,t}.$$

Um die $\tau\,a\,b$ zu erhalten, sind zunächst die von der zufälligen Breite des Profils unabhängigen Werte

$$\tau\,b\,z = Q\,.\,\frac{b}{t}\,.\,\frac{s_{1-4}}{c}$$

construirt worden. Zu diesem Zwecke trägt man (Tafel 2_4) in der

Entfernung b vom Pole O_2 die Strecke t horizontal auf und sucht diejenige Horizontale, auf welcher die von O_2 nach den Endpunkten von t gezogenen Linien die Kraft Q abschneiden; dann hat diese Horizontale von O_2 den Abstand $Q \cdot \frac{b}{t}$, und die Strahlen des zweiten Kräftepolygons schneiden auf ihr die Werte $\tau\, b\, z$ ab, wie man durch Aufstellen der Proportion leicht erkennt. Die Kraft Q haben wir gleich $5\, t$ angenommen.

Ueberträgt man die Werte $\tau\, b\, z$ mit dem Zirkel in das Schienenprofil, so bekommt man die «Kurve der $\tau\, b\, z$».

Um von diesen Werten auf $\tau\, a\, b$ überzugehen, hat man sie mit $\frac{a}{z}$ oder mit $\frac{{}^1/_2\, a}{{}^1/_2\, z}$ zu multipliciren; zu diesem Zwecke zeichnet man in der Figur 1 rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten ${}^1/_2\, z$ und ${}^1/_2\, a$ und zieht zu den Hypotenusen Parallelen durch die Endpunkte von $\tau\, b\, z$; dann schneiden diese auf der verticalen Mittellinie $\tau\, a\, b$ ab.

Um nun zu den in schiefen Schnitten wirkenden Spannungen σ_{max} und τ_{max} zu gelangen, hat man an jeder Lamellengrenze den auf der Seite 80 dargestellten Halbkreis zu zeichnen, für welchen ${}^1/_2\, \sigma$ und τ, unter rechtem Winkel aneinander gefügt, den Radius geben. Auf der Tafel 2_1 befinden sich ${}^1/_2\, \sigma\, a\, b$ und $\tau\, a\, b$ bereits in der gewünschten Stellung; die Halbkreise können somit ohne weitere Vorbereitung gezeichnet werden. Einer derselben (Grenze 4—5) ist der Deutlichkeit halber ausgezogen worden; an den übrigen Stellen wurden dagegen nur je die Endpunkte mit dem Zirkel markirt.

Die Abschnitte, in welche die Durchmesser dieser Halbkreise durch die verticale Mittellinie zerlegt werden, sind nun sofort die Maxima und Minima von σ; die Verbindung der Durchmesserendpunkte führt daher zu den beiden mit «Maximal-» und «Minimal-Spannungen» bezeichneten Kurven.

Diese Kurven geben einen guten Ueberblick über die Inanspruchnahme des Materials an verschiedenen Stellen des Querschnittes. Man erkennt auch hier wieder, dass die grösste Inanspruchnahme nicht notwendig im Kopf oder Fuss eintritt, sondern dass die Spannungen an Stellen, wo die Querschnittsbreite stark abnimmt, leicht grösser werden kann.

Der Vollständigkeit wegen ist durch Drehen der $\tau\, a\, b$ um 90° auch noch die Kurve der «Scherspannungen» construirt worden;

für die oben beschriebene Construction der grössten σ ist sie nicht nötig, gibt aber einen angenehmen Ueberblick über den starken Wechsel der transversalen Spannungen. Auch ermöglicht sie, wie schon in der vorigen Nummer (S. 98) gezeigt wurde, eine rasche Entscheidung der Frage, ob σ_{max} irgendwo anders grösser werden kann als im Kopfe; zeichnet man wie dort eine Parabel, deren Scheitel im obersten Punkte der Schiene liegt und die in halber Höhe das im Kopfe wirkende $\sigma\, a\, b$ abschneidet, und ebenso eine Parabel, deren Scheitel im Fusspunkte liegt und die auf Schwerpunktshöhe den im Fusse vorhandenen Wert von $\sigma\, a\, b$ abschneidet, so ersieht man, dass diese Parabeln die Kurve der $\tau\, a\, b$ zwar nicht schneiden, dass aber die zweite derselben ihr bei der Lamelle 11 sehr nahe tritt; damit zusammenhängend besitzt die Kurve der Maximalspannungen an dieser Stelle eine starke Anschwellung, die nahezu den im Fusse herrschenden Wert erreicht.

Die τ_{max} werden nach früher durch die Radien der Halbkreise dargestellt; diese Werte noch besonders von der Profilaxe aus aufzutragen, kann man sich ersparen, da die gezeichneten Kurven der Maximal- und Minimalspannungen zugleich auch die grössten Schubspannungen angeben, sobald man an Stelle der Verticalen die schiefe Linie der $^1/_2\, \sigma\, a\, b$ als Axe ansieht.

Will man die Richtung der Schnitte kennen, auf welche die σ_{max} und σ_{min} einwirken, so hat man (vgl. Fig. 31, S. 80) nur den Endpunkt von $\tau\, a\, b$ mit den Endpunkten des Durchmessers zu verbinden. —

Die Belastungsverhältnisse, welchen die auf der Tafel 2 durchgeführten Constructionen entsprechen, sind, wie nachträglich noch gezeigt werden soll, die folgenden:

Das gleich 10 t angenommene $\sigma\, a\, b$ entspricht einem Biegungsmomente $M = \frac{\sigma J}{e} = \sigma\, a\, b\, t = 10\,.\,7{,}72 = 77{,}2\ cmt$; als Scherkraft ist $Q = 5\ t$ angenommen worden; damit diese obiges Moment hervorrufe, muss sie am Hebelsarm $\frac{77{,}2}{5} = 15{,}4\ cm$ wirken. Diese Verhältnisse passen somit auf eine Schiene, die einen Raddruck von 10 t zu tragen hat und bei welcher die Wendepunkte der elastischen Linie innerhalb zweier Stützpunkte (Schwellen) 30,8 cm voneinander entfernt sind.

In der Regel wird wohl die Scherkraft kleiner, das Moment

dagegen grösser sein. Hier haben wir vorzugsweise aus Deutlichkeitsgründen die Belastungsverhältnisse also angenommen. —

Die bis dahin besprochenen Verhältnisse beziehen sich jedoch nur auf die verticale Symmetrie-Ebene der Schiene. Für Querschnittspunkte ausserhalb der Mittellinie treten dagegen, wie auf den Seiten 69 und 70 gezeigt worden ist, zu den vertical gerichteten Schubspannungen noch horizontal gerichtete hinzu. Die Grösse dieser letzteren wird (vgl. Fig. 23, S. 69) so bestimmt, dass die Mittelkraft beider Spannungen durch den Punkt geht, in welchem sich die in gleicher Höhe an den Umfang gelegten Tangenten schneiden. Diese quer laufende Schubspannung (und damit auch die Gesamtspannung) nimmt hiernach von der Mittellinie aus nach beiden Seiten zu und zwar um so stärker, je mehr die Umfangslinie des Profils von der Verticalen abweicht.

Wir haben nun auf der Tafel 2, Figur 5, auch noch diejenigen transversalen Spannungen bestimmt, die im Umfange des Profils entstehen; sie bilden die Kurve der $\tau\, a\, b$. Man findet dieselben graphisch leicht mit Hülfe von rechtwinkligen Dreiecken, deren verticale Katheten den vertical gerichteten τ gleich sind und deren Hypotenusen dem Umfang parallel laufen. Die Kurve fällt, soweit das Profil vertical begrenzt ist, mit derjenigen der Figur 1 zusammen, erhält dagegen, wo der Steg in den Kopf und in den Fuss übergeht, scharfe Ausbiegungen.

Unter Verwendung dieser τ sind dann wiederum, ganz so wie in der Figur 1, die Kurven der σ_{max} und σ_{min} gezeichnet worden. Auch diese zeigen naturgemäss die nämlichen Sprünge und überragen die für die oberste und unterste Kante gültigen Werte um ein Bedeutendes. —

Die Kurven der Figur 5 enthalten nichts weiter als die Resultate einer folgerichtigen Durchführung der allgemein gültigen Festigkeitslehre. Indessen ist es nicht wahrscheinlich, dass diese Ergebnisse mit der Wirklichkeit ganz übereinstimmen; die Praxis hätte sonst die scharfen Breitenwechsel der Walzeisenprofile schon längst abgeschafft. Offenbar ist die auf der Seite 63 gemachte Annahme, dass sich die Schubkraft in einem horizontalen Längsschnitte gleichförmig über die ganze Breite verteile, nicht überall zulässig.

Der Wert unserer kleinen Studie mag hiernach ein zweifelhafter sein; doch geht aus ihr zweierlei hervor: Erstens, dass allzu schroffe Uebergänge von Steg zu Kopf und Fuss besser vermieden

werden; zweitens, dass unsere übliche Festigkeitslehre auch an dieser Stelle eine Lücke und einen noch unaufgeklärten dunkeln Punkt besitzt.

24. Maximalspannungen im Innern eines Blechbalkens.

(Tafel 3.)

Die Ergebnisse der vorigen Nummern sollen nun noch durch die Anwendung auf ein spezielles Beispiel ergänzt werden.

Wir wählen zu diesem Zwecke einen an dem einen Ende eingespannten Blechbalken mit gleichförmig verteilter Belastung; bei diesem trifft bekanntlich das grösste Biegungsmoment mit der grössten Scherkraft zusammen. Unsere Aufgabe besteht darin, für verschiedene Querschnitte die Kurven der σ_{max} und im Anschluss daran die Zug- und Druckkurven zu zeichnen.

Die betreffenden Constructionen sind auf der Tafel 3 ausgeführt worden. Als Balkenlänge haben wir 6 *m*, als Höhe 1,2 *m*, als Belastung 25 *t* angenommen.

Der Träger ist in der Figur 1 im Massstab 1 : $33^1/_3$ in Ansicht dargestellt, während die Figur 2 die Hälfte des Querschnittes im Massstab 1 : 10 zeigt; die Dimensionen der einzelnen Teile sind in Centimetern beigeschrieben. Zugleich enthält die Figur 2 die Construction des Trägheitsmomentes des Querschnittes, welche ganz nach dem bekannten Verfahren durchgeführt worden ist, nur mit dem Unterschied, dass in Anbetracht der Symmetrie alle Constructionen auf die Hälfte beschränkt wurden.

Bei der Einteilung der Querschnittsfläche liess man die Grenzlinien möglichst mit den Berührungsflächen der einzelnen Teile, aus welchen der Balken gebildet ist, zusammenfallen. Die Mittelplatte ist in drei Lamellen (1 bis 3) von 20, 20 und 19 *cm* Länge zerlegt worden; die Lamelle 4 besteht aus den an der Mittelplatte anliegenden, 5 aus den beiden andern Schenkeln der Winkeleisen, und die 6te Lamelle bildet die Kopfplatte. Die Lamellen 3 und 4 greifen somit übereinander weg, was der Wirklichkeit wohl besser entspricht, als wenn man die Schenkel 4 und das von ihnen eingeschlossene Stück des Steges als ein einziges Element des Querschnittes behandelt, wie dies in der Textfigur 41 (S. 95) der Einfachheit halber geschehen ist. Als Berührungsfläche zwischen 3 und 4 ist sodann

die Axe der Niete angenommen worden, welche Linie sich auf der Tafel 3_2 mit der Schwerlinie von 4 deckt.

Als Basis a zur Reduction der Flächen haben wir 2 *cm* gewählt; die Resultate der Verwandlung, die Längen Δr, sind daher bei den Lamellen 1, 2, 3 und 6 gleich der halben Länge dieser Platten und bei den Lamellen 4 und 5 gleich $2 \cdot \frac{1,2}{2}$ mal der einfachen Schenkellänge des Winkeleisens. Die Summe aller Δr ergibt sich gleich 74,5 *cm*, was einer halben Querschnittsfläche von 149 und einer ganzen von 298 cm^2 entspricht.

Die auf einer Horizontalen aufgetragenen Δr bilden nun mit dem Pole O_1, dessen Abstand $b = 50$ *cm* ist, das erste Kräftepolygon. Die Kräfte greifen in den Schwerpunkten der einzelnen Lamellen an. Das Seilpolygon, das sich hieraus ergibt, schneidet auf der horizontalen Schwerlinie des Querschnittes die statischen Momente Δs ab; diese bilden mit dem Pole O_2, dessen Abstand gleich e, das heisst gleich der halben Balkenhöhe genommen wurde, das zweite Kräftepolygon. Die Δs greifen jedoch nicht in den Schwerpunkten der Lamellen, sondern (vergleiche den ersten Band von Culmanns Graph. Statik) in den Antipolen der Mittelaxe in Bezug auf die Centralellipsen der einzelnen Lamellen an. Diese Antipole wurden (Fig. 2 links) für die Lamellen 1 bis 3 vermittelst kleiner rechtwinkligler Dreiecke construirt, deren Höhen gleich 0,289 mal der Lamellenlänge sind; für 4 bis 6 wurden die Schwerpunkte beibehalten, da sie von den Antipolen nicht mehr unterschieden werden können. Das zweite Seilpolygon ist in der Figur 2 rechts gezeichnet worden; seine letzte Seite schneidet auf der Mittellinie die Strecke $\frac{1}{2}\, t = 60,5$ *cm* ab; das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes ist daher

$$J = a \cdot b \cdot e \cdot t = 2 \cdot 50 \cdot 60 \cdot 121 = 726000\ cm^4,$$

das Widerstandsmoment

$$\frac{J}{e} = a \cdot b \cdot t = 12100\ cm^3.$$

Nun wurde in der Figur 1, direct unterhalb der Balkenansicht die Momentenfläche construirt. Die Gesamtlast von 25 t wurde im Massstab 1 $t = 2$ *mm* aufgetragen und in 5 gleiche Teile geteilt; gleicherweise wurde die Balkenlänge durch 4 Querschnitte in 5 gleich lange Strecken zerlegt und je die Mittellinie derselben als

Kraftlinie betrachtet. Als Distanz für den Pol O des Kräftepolygons wurden $2t = 242$ *cm* gewählt und im entsprechenden Massstabe ($1 : 33^1/_3$) aufgetragen. In diesem Falle sind nämlich die Biegungsmomente, wenn die Ordinaten der Momentenfläche mit y bezeichnet werden,

$$M = 2t \,.\, y,$$

und da zugleich

$$M = \frac{\sigma \,.\, J}{e} = \sigma \,.\, a \,.\, b \,.\, t$$

ist, so findet sich kurzweg

$$^1/_2 \, \sigma \, a \, b = y.$$

Die Spannung $^1/_2\,\sigma$ erscheint auch hier mit der Fläche $a\,b = 100$ cm^2 multiplicirt, welche wir für alle vorkommenden Spannungen gewissermassen als Einheit ansehen.

Die grösste Normalspannung, welcher der Balken ausgesetzt ist, ergibt sich hiernach an der Einmauerungsstelle, wo $y = 62$ *mm* $= 31\,t$ ist, gleich $0{,}62\,t$ pro cm^2; da der volle Querschnitt (ohne Abzug der Nietlöcher) in Rechnung gezogen wurde, so entspricht diese Zahl annähernd dem in der Praxis gebräuchlichen Werte.

Bei der Construction der $\tau\,a\,b$ wurde ganz so wie in der vorigen Nummer verfahren. Vom Pole O_2 aus wurde nach rechts abwärts eine Linie $O_2\,P$ gezogen, welche, wie es eingeschrieben ist, auf der letzten Seite des zweiten Seilpolygons die Strecke $^1/_2\,b$ abschneidet, deren Neigungswinkel daher gleich $arc\ tang\ \frac{b}{t}$ ist. Zieht man fünf Horizontalen I bis V derart, dass auf denselben durch die Linien $O_2\,P$ und c die Scherkräfte Q abgeschnitten werden, welche den fünf Querschnitten entsprechen, so stehen diese Horizontalen von O_2 um die Strecken $Q \,.\, \frac{b}{t}$ ab und die Strahlen aus O_2 schneiden auf denselben die Segmente $Q \,.\, \frac{b}{t} \,.\, \frac{s}{c}$ oder $\tau\,b\,z$ ab. Mit Hülfe des Zirkels wurden nun diese Strecken in die Figuren 3 bis 5 übertragen und daselbst die Kurven der $\tau\,b\,z$ gezeichnet. Um Platz zu sparen, haben wir diese Figuren nicht nur in kleinerem Massstabe (was die Längen betrifft) gezeichnet, sondern zugleich in der Figur 4 die Constructionen für die Schnitte II und IV, in der Figur 5 diejenigen für III und V vereinigt. Ferner wurden die (gestrichten) Kurven der $\tau\,b\,z$ der Symmetrie des Querschnittes wegen je nur

zur Hälfte gezeichnet; endlich haben wir von den beiden Kurven der Maximal- und Minimal-Spannungen, welche genau gleich ausfallen, stets nur die eine ausgezogen.

Um aus den $\tau b z$ die $\tau a b$ zu erhalten, müssen erstere mit $\frac{a}{z}$ multiplicirt werden. Dieses Verhältnis ist für die Steglamellen 1 bis 3 gleich 2 : 1, für die Lamelle 4 gleich 2 : 3,4, für die beiden letzten Lamellen jedoch so gering, dass die $\tau a b$ verschwindend klein ausfielen und vernachlässigt werden konnten. Obige zwei Verhältnisse wurden durch zwei schiefe Linien dargestellt; dann wurden durch die Endpunkte der $\tau b z$ Parallelen dazu gezogen, und zwar an den Grenzen der Lamellen 1 bis 3 Parallelen zu der einen, an den Grenzen von 4 zu der andern der beiden Linien. Die $\tau a b$ liegen jetzt, wie es sein muss, auf der verticalen Axe.

Die Ordinaten der Momentenfläche in der Figur 1, welche $^1/_2\, \sigma a b$ darstellen, wurden jeweilen am Kopf beziehungsweise Fuss aufgetragen und durch deren Endpunkte Linien nach dem Schwerpunkte gezogen.

Endlich folgte die Construction der Maximalkurven wie in der vorigen Nummer durch Ziehen von Halbkreisen, deren Mittelpunkte auf den Linien der $^1/_2\, \sigma a b$ liegen. Von diesen sind einige der Deutlichkeit halber punktirt ausgezogen worden. Mit Hülfe dieser Halbkreise wurde je die eine Hälfte der Maximalkurve gewonnen; um die andere zu erhalten, brauchte man nur das kleinere der vom Halbkreis abgeschnittenen Segmente jeweilen auf die symmetrisch liegende Stelle zu übertragen. An den Lamellengrenzen 3—4 und 4—5, wo sich die Breite z plötzlich ändert, sind, entsprechend den zwei verschiedenen $\tau a b$ auch je zwei solcher Halbkreise zu zeichnen; demzufolge erhalten die Maximalkurven an diesen Stellen plötzliche Sprünge.

An diesen Stellen kann, wie schon früher betont wurde, die grösste Inanspruchnahme grösser als in den äussersten Kanten ausfallen. Bei den auf unserer Tafel gewählten Dimensionen und Kräften findet dies für alle Schnitte mit Ausnahme des Widerlagerschnittes statt. Beim Schnitt IV zum Beispiel ergibt sich die Spannung σ_{max} an der äussersten Kante gleich 0,40 t, dann nimmt sie ab bis auf 0,36 t, springt jedoch hierauf plötzlich auf 0,41 t. Noch grösser sind die Unterschiede in den weiter nach links liegenden Schnitten.

Es ist jedoch auch hier zu betonen, dass dieses Verhältnis in der Praxis in der Regel nur da eintritt, wo die Spannung in der äussersten Kante unter der zulässigen liegt, so dass eine sorgfältige Berechnung der in schiefen Schnitten wirkenden σ_{max} nicht notwendig wird, so lange man nur nach der absolut grössten Spannung frägt.

Im Anschluss an obige Constructionen sind auf der Tafel 3 zum Schluss auch die Zug- und Druckkurven gezeichnet worden, das sind die Linien, längs welchen keine Scherspannungen wirken und die Normalspannungen ihre grössten und kleinsten Werte annehmen. (Vgl. Nr. 18.)

Aus den Halbkreisen werden, entsprechend der Textfigur 31 (Seite 80) die Richtungen dieser Kurven dadurch gewonnen, dass man über den Durchmessern rechtwinklige Dreiecke zeichnet, deren Spitzen in der Axe liegen. Da beide Richtungen aufeinander senkrecht stehen, so genügt es, von den Dreiecken je die eine Kathete zu ziehen, wie es in den Figuren 3—5 für die Lamellengrenze 2—3, beziehungsweise 3 — 4 geschehen ist. Die Neigungswinkel dieser schiefen Linien sind mit δ bezeichnet. Die beiden Richtungen wurden sodann in die Ansichtsfigur des Balkens übertragen und dort als kleine Kreuze angedeutet. Wo sich die Breite z plötzlich ändert (Figur 5, Lamellengrenze 3—4), erhält man den zwei Halbkreisen entsprechend auch zwei verschiedene Richtungen. Demzufolge ergaben sich in der Nietaxe je zwei halbe, gegeneinander etwas verdrehte Kreuze.

Obgleich die Zahl der eingetragenen Kreuze verhältnismässig gering ist, so gelingt es einem geübten Zeichner dennoch, die Spannungstrajectorien mit ziemlicher Sicherheit zu ziehen. Wir haben von jedem System elf gezeichnet und zwar diejenigen, welche die Balkenaxe je in einem Zehntel schneiden. Sämtliche Kurven laufen in der Balkenaxe und im Endquerschnitt (wo $\tau = 0$ ist) unter 45^0; am Kopf und Fuss gehen sie in die horizontale, beziehungsweise verticale Richtung über. Wo sich zwei Kurven treffen, kreuzen sie sich stets unter rechtem Winkel. In der Nietlinie bekommt jede Kurve eine Knickung. Erinnert man sich an diese einfachen Gesetze und wendet zugleich einige nahe liegende Interpolationsconstructionen an, so fällt das Ziehen der Kurven bei einiger Uebung nicht gar schwer.

Der Unterschied in der Form der Trajectorien bei vorherrschend

normalen oder vorherrschend transversalen Spannungen spricht sich am deutlichsten in der Form der Maschen aus, welche sie bilden. Diese Maschen sind da, wo die σ null oder doch verhältnismässig klein sind, Quadrate, an andern Stellen dagegen lang gezogene Vierecke. In der Mittelrippe des Balkens, namentlich gegen das freie Ende hin, sind die Kurven nur schwach gekrümmt; würde die Stegdicke noch kleiner gemacht, so dass die τ noch mehr in den Vordergrund träten, so näherten sich die Kurven noch mehr den geraden Linien von 45^0 Neigung. Dies deutet darauf hin, dass (theoretisch gesprochen) in einem Fachwerkträger die Streben am günstigsten unter 45^0 geführt werden.

Wie sich die Kurven im eingemauerten Teil des Balkens fortsetzen, lässt sich im Allgemeinen nicht sagen, da die Druckverhältnisse hier zu sehr von Nebenumständen abhängen; indessen geht man nicht stark fehl, wenn man sie ähnlich wie im freien Teil verlaufen und im Endquerschnitt unter 45^0 endigen lässt.

Die Richtungen, in welchen die Transversalspannungen ein Maximum werden, halbiren nach der Nummer 18 die rechten Winkel, welche die Zug- und Druckkurven miteinander bilden. Wir haben es, da sie sich im Anschluss an letztere leicht ziehen lassen, unterlassen, sie auf der Tafel 3 zur Darstellung zu bringen.

Die Grössen der τ_{max} werden, wie schon früher bemerkt, durch die Kurven der σ_{max} dargestellt, sobald man die Linie der $^1/_2 \sigma\, a\, b$ als Ordinatenaxe annimmt. Da die grössten τ stets kleiner als die grössten σ sind, so kommen sie, so lange das Material nach allen Richtungen gleich gut widersteht, nicht in Betracht. Speziell die Niete haben den im Längsschnitt wirkenden Scherspannungen und nicht den τ_{max} zu widerstehen, weil nur parallel zur Balkenaxe so geschnitten werden kann, dass keine anderen Teile als die Niete getroffen werden.

Unter der Voraussetzung, dass die Niete in den verschiedenen Reihen gleich weit auseinander stehen, sind die der Balkenaxe zunächst stehenden, also diejenigen, welche die Winkeleisen mit dem Stege verbinden, am stärksten in Anspruch genommen; sie haben der scherenden Kraft im Schnitte 3—4 zu widerstehen. Nun beträgt die Kraft $T = \tau\, b\, z$ für die genannte Stelle im Widerlagerquerschnitt, wo sie offenbar am grössten wird, $9\,t$. Dieser Kraft haben die Niete auf der Länge b zu widerstehen. Bezeichnet man die Entfernung der Niete mit n, so trifft auf jeden Niet die

Kraft $\frac{n}{b}$ T. Nennt man ferner den Bolzendurchmesser d und die zulässige Schubspannung τ', so ergibt sich, da jeder Niet doppelt geschnitten wird, die Beziehung

$$\frac{n}{b} T = 2 \tau' \frac{\pi d^2}{4}.$$

Setzt man $d = 2$ *cm* und $\tau' = 0,6$ *t*, so wird im vorliegenden Falle

$$\frac{n}{50} . 9 = 2 . 0,6 . 3,14$$

$$n = 21 \ cm.$$

Die Niete könnten somit bei einer Entfernung von 21 *cm* den scherenden Kräften genügend widerstehen; denn gegen das freie Ende hin nimmt die Scherkraft fortwährend ab.

In der Nummer 22, Seite 96, ist ferner gezeigt worden, dass die in der Stegmitte herrschende Schubspannung annähernd nach der Formel

$$\tau = \frac{Q}{z . h}$$

berechnet werden kann, in welcher Q die Scherkraft und h die Balkenhöhe bedeutet, und dass dieser Ausdruck auch zur Berechnung der Nietentfernung benützt werden kann. Es mag die Frage interessiren, zu welcher Entfernung man mit Hülfe dieser nur annähernd richtigen Formel gelangt. Führt man statt dem der Zeichnung entnommenen Werte von T den Wert $\tau b z = \frac{Q b}{h}$ ein, so erhält man

$$\frac{Q n}{h} = 2 \tau' \frac{\pi d^2}{4}$$

und hieraus, indem man $Q = 25$ *t*, $h = 120$ *cm* und wie vorhin $\tau' = 0,6$ *t* und $d = 2$ *cm* setzt,

$$n = 18 \ cm \text{ (anstatt 21 wie oben).}$$

Die angenäherte Berechnung der Nietentfernung gibt überhaupt fast in allen Fällen kleinere Werte, das heisst stärkere Vernietungen als die genaue und ist daher um so eher gestattet.

Auch die zur Berechnung von $\frac{J}{e}$ aufgestellte Annäherungs-Formel auf der Seite 94 möge noch mit den hier gefundenen Resultaten verglichen werden.

Das Moment der äusseren Kräfte beträgt für den Widerlagerschnitt

$$M = {}^1/_2 P l = {}^1/_2 . 25 . 6 = 75\ mt = 7500\ cmt.$$

Diesem widersteht die Querschnittsfläche des Kopfes mit $F_1 = 40 + 2 . 25 = 90\ cm^2$ und diejenige des Steges mit $F_2 = 118\ cm^2$. Die Balkenhöhe beträgt $h = 120\ cm$ und die Entfernung der Schwerpunkte von Kopf und Fuss (nach Schätzung) $h_s = 115\ cm$; man bekommt daher das Widerstandsmoment

$$\frac{J}{e} = (90 + {}^1/_6 . 118)\frac{115^2}{120} = 12086\ cm^3,$$

und hiernach die grösste Normalspannung

$$\sigma = \frac{7500}{12086} = 0{,}62\ t,$$

welcher Wert mit dem aus der Zeichnung gefundenen vollkommen übereinstimmt.

25. Kranartige Constructionen.

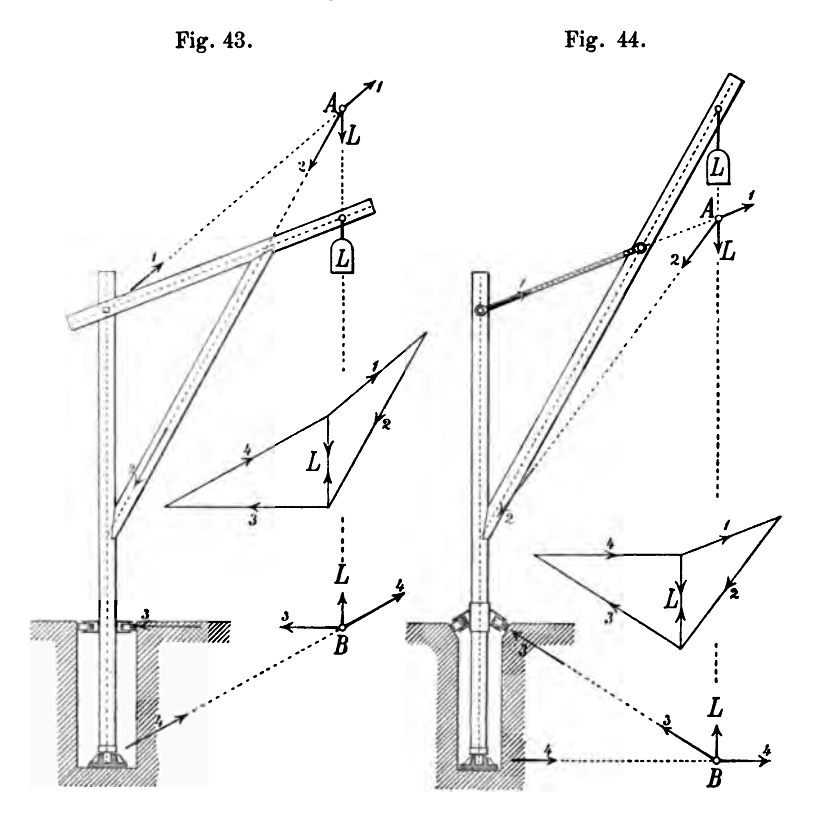
Als Beispiele von Balken, welche gleichzeitig neben Biegungsmomenten und scherenden Kräften auch noch Normalkräften zu widerstehen haben, wollen wir hier die an Kranen oder kranartigen Verbindungen wirkenden inneren Spannungen besprechen und benützen diese Gelegenheit, zugleich einige graphische Zusammensetzungen und Zerlegungen von Kräften zu erläutern, deren Behandlung ihrer Natur nach freilich eher an eine frühere Stelle verwiesen werden sollte.

Wird eine Last L von Kranen getragen, welche den Figuren 43 und 44 entsprechend construirt sind, so gelangt man zu den an den einzelnen Teilen angreifenden Kräften am leichtesten, wenn man das Gleichgewicht der am verticalen Pfosten oder an der Wendesäule wirkenden Kräfte ausdrückt, weil an diesem Gliede sämtliche gesuchten Kräfte, im vorliegenden Falle deren vier, zusammentreffen.

Sobald ein Constructionsstab an seinen Endpunkten mit Gelenken versehen ist, wie das Zugband in der Figur 44, so fällt die an ihm wirkende Kraft mit seiner Längsaxe zusammen, oder richtiger gesagt, sie geht durch die beiden Gelenkmittelpunkte; ihre Lage

ist daher von vornherein bekannt. Das nämliche gilt, wenn auch nicht mit derselben Schärfe, von den Endpunkten der Strebe in der Figur 43 und dem Strebenfuss in der Figur 44; denn auch hier ist die Kraft genötigt, durch bestimmte Punkte zu gehen, weil die übliche Verbindungsweise der betreffenden Balken durch excentrische Kräfte sofort gelöst würde. Wenn ferner die Wendesäule an irgend einem Punkte durch einen Rollenkranz unterstützt wird, so steht die an diesem Punkte angreifende Kraft senkrecht auf der Rollfläche; höchstens kann sie um den stets geringen Reibungswinkel von dieser Richtung abweichen.

Fig. 43. Fig. 44.



Auf Grund dieser beiden Gesetze ist es nun leicht, die vier in den Figuren 43 und 44 auftretenden Kräfte zu bestimmen; denn in der ersteren sind die Kräfte 2 und 3, in der letzteren die Kräfte 1 und 3 der Lage nach bekannt; man findet daher durch Zerlegung der Last L im Punkte A die Kräfte 1 und 2 und, da alle vier

Kräfte sich das Gleichgewicht halten müssen, durch ein geschlossenes Polygon die Kräfte 3 und 4.

In der Figur 44 darf die Kraft 4, welche den Zapfen- oder Pfannendruck darstellt, nicht abwärts gerichtet sein, weil sonst die Pfanne abrutschen oder vielmehr der Pfosten sich aus dem Lager herausheben würde; höchstens um den Reibungswinkel des Zapfens an der Wand der Pfanne könnte allenfalls die Kraft 4 von der Horizontalen nach unten abweichen.

In der Regel haben Kräne nicht nur eine Last einfach zu tragen, sondern sie sind mit Vorrichtungen zum Heben und Niederlassen der Last versehen. In diesem Falle sind auch die in den Seilen oder Ketten wirkenden Kräfte zu berücksichtigen; im Ganzen bleibt jedoch das Kräftepolygon dasselbe.

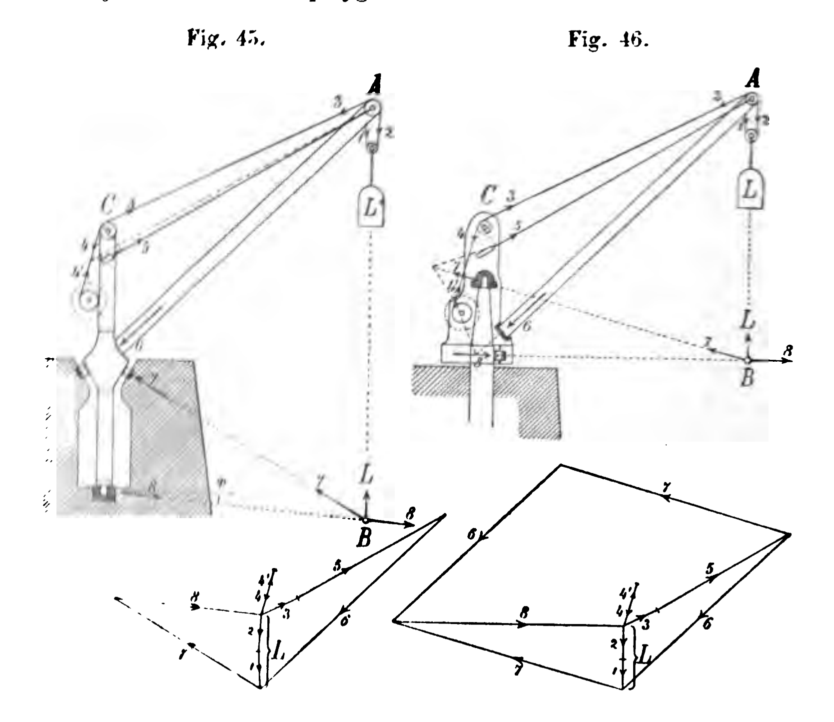


Fig. 45. Fig. 46.

Als Beispiele wählen wir die beiden in den Figuren 45 und 46 dargestellten Anordnungen. Zunächst werden durch Zerlegung der gegebenen Last die beiden Kettenspannungen 1 und 2 gefunden. Dann ist die Kraft 3 gleich der Kraft 2, oder genauer um die Seil- und Rollenreibung grösser, vorausgesetzt, dass die Last ge-

hoben wird. Um dieselbe Grösse ist 4 grösser als 3 und so fort. Hiernach kann man die Kraft 3 im Kräftepolygon auftragen und durch Zerlegen der Mittelkraft von 1 bis 3 die Kräfte 5 und 6 finden. Die Kraft 4 kommt hinsichtlich der Wendesäule zweimal vor; im Punkte C wirkt sie abwärts (4), an der Trommel aufwärts (4'); im Kräftepolygon heben sich die zwei Kräfte direct auf. Endlich erhält man durch zwei weitere Parallelen wie in den vorhergehenden Beispielen die Kräfte 7 und 8, den Rollendruck und den Zapfendruck.

In der Figur 45 haben wir dem Rollenkranz seine Grenzlage gegeben; bei noch flacherer Rollfläche würde die Kraft 8 mehr als um den Reibungswinkel von der horizontalen Richtung abweichen und infolge dessen der Kran, dem Zuge der Last L folgend, ausgleiten.

Nun sind sämtliche Kräfte, welche am Kran wirken, bestimmt; hinsichtlich der Wendesäule greifen sie bei der Figur 45 in der Reihenfolge (3,4), 5, 4', 6, 7 und 8 an; in dieser Anordnung sind die Kräfte durch ein Seilpolygon zu verbinden, damit man für jeden Querschnitt die Mittelkraft der ausserhalb wirkenden Kräfte erhält. In der Figur ist dieses Seilpolygon gestricht eingezeichnet; es verläuft von C im Zickzack nach A und von da nach B. In der durch die Figur 46 dargestellten Anordnung hat die Säule nur die Kräfte 7 und 8 auszuhalten; dagegen ergibt sich für das umhüllende Blechgehäuse, an welchem die Lager für die Rolle C und die Seiltrommel befestigt sind, die Reihenfolge (3,4), 5, 7, 4', 6, 8. Um die Kräfte in dieser Gruppirung zusammensetzen zu können, musste zunächst im Kräftepolygon an 5 die Kraft 7 und an diese 6 angereiht werden; hierauf war das Seilpolygon leicht zu zeichnen; es verläuft von C aus zickzackförmig und endigt in der Nähe des Rollenkranzes.

Durch Kräfte- und Seilpolygon ist nun für jeden Querschnitt die ausserhalb wirkende Kraft nach Lage und Richtung bestimmt, und es ist nicht schwer, aus diesen Kräften die inneren Spannungen abzuleiten.

Die Strebe 2 in der Figur 43 und die Streben 6 in den Figuren 45 und 46 werden ausschliesslich auf Druck, das Zugband 1 in der Figur 44 und die Bänder 5 in den Figuren 45 und 46 nur auf Zug in Anspruch genommen. Die betreffenden Kräfte verteilen sich somit gleichförmig über die Querschnitte. Alle übrigen Teile

dagegen haben Kräfte auszuhalten, deren Angriffspunkte ausserhalb der Querschnittsschwerpunkte liegen, Kräfte, welche daher ungleich verteilte Normalspannungen und ausserdem zum Teil auch transversale Spannungen hervorrufen.

So nimmt der die Last tragende Balken in der Figur 43 an dem einen Ende die Kraft L, an dem andern die Kraft 1 und am Befestigungspunkt der Strebe die Kraft 2 auf. Rechts von diesem letzteren Punkte bildet L, links davon 1 die äussere Kraft; beide bewirken sowohl normale als auch transversale Spannungen; durch einfaches Zerlegen findet man leicht für jeden beliebigen Schnitt die Grösse und den Angriffspunkt der Normalkraft P, sowie die Grösse der Scherkraft Q und hieraus nach früher gegebenen Regeln die inneren Kräfte. Wird der Balken aus Holz gebildet, so interessirt uns (nach Nr. 20) nur das grösste Biegungsmoment, und dieses tritt offenbar am Angriffspunkte der Strebe ein.

Der Pfosten der Figur 43 wird in seinem oberen Teil durch die Kraft 1, in seinem unteren durch 4, im mittleren dagegen durch die Kraft L beansprucht; da diese letztere zur Pfostenaxe parallel gerichtet ist, so erleidet der mittlere Teil nur normale und keine scherenden Spannungen.

Aehnliches gilt von den in den Figuren 44 bis 46 dargestellten Kränen. Da wir unseren Figuren keine bestimmten Dimensionen und Gewichte zu Grunde gelegt haben, so beschränken wir uns hier auf diese Bemerkungen und wollen in der nächsten Nummer an einem speziellen Beispiele diese Angelegenheit weiter entwickeln.

26. Construction der an einem Blechkran wirkenden Kräfte.

(Tafel 4.)

Der auf der Tafel 4 abgebildete Blechkran bildet einen einzigen gekrümmten Balken. Da ausserhalb der Schnitte, die durch ihn geführt werden, Kräfte von den verschiedenartigsten Richtungen und Grössen wirken, so ist dieses Beispiel bezüglich der Construction der inneren Spannungen ganz besonders lehrreich. Auf der Tafel ist diese Construction für die neun mit römischen Ziffern bezeichneten, senkrecht auf die Balkenaxe gelegten Schnitte durchgeführt.

Die Last L, welche der Kran tragen soll, wurde zu 10 Tonnen angenommen. Der Haken, an welchem diese Last hängt, ist oben mit einem gezahnten Rädchen versehen, um das sich eine Gall'sche Kette schlingt, die so einen einfachen Flaschenzug bildet. Das eine Ende der Kette ist am Kopf des Krans befestigt, das andere wird vermittelst dreier, im Inneren des Krans angebrachter Rollen zum Zahnrad des Hebezeuges geleitet, durch welches sie nachgelassen und angezogen wird, um sich nachher im Kran selbst zusammenzulegen. Die Drehvorrichtung unten bedarf keiner weiteren Erklärung. Der im Mauerwerk steckende Teil des Krans ist wegen Platzmangel kürzer angenommen worden, als es praktisch zweckmässig wäre.

Nach einer ersten angenäherten Annahme der Gewichte wurden die Abmessungen festgestellt und dann die Gewichte der einzelnen Teile wie folgt berechnet:

K	Gewicht des Hakens und der Kette				. . . .	0,150 t
1	» » Krankopfes jenseits des Schnittes I				. . .	0,350 »
2	» » Krans mit Kette	zwischen	I	und	II	0,740 »
3	» » » » »	»	II	»	III	0,223 »
4	» » » » »	»	III	»	IV	0,936 »
5	» » » » »	»	IV	»	V	0,268 »
6	» » » » Hebezeug	»	V	»	VI	1,260 »
7	» » »	»	VI	»	VII	0,456 »
8	» » »	»	VII	»	VIII	0,328 »
9	» » »	»	VIII	»	IX	0,292 »
10	» » »	»	IX	»	X	0,247 »
					Gesamtgewicht	5,250 t

Die Last L mit dem Gewichte K zerlegt sich nun zunächst in die zwei Kettenspannungen S_1 und S_2, die an Stelle von $L + K$ im Kräftepolygon (Figur 2) im Massstab $1\ t = 2\ mm$ aufgetragen sind; an diese schliessen sich dann obige Gewichte 1 bis 10. Aus der Kettenspannung S_2 findet man nun, wenn der Reibungscoefficient der einzelnen Rollen bekannt ist, alle weiteren Kettenspannungen. In unserem Beispiel wurde die Reibung zu 4 % angenommen; es verhalten sich demnach je zwei aufeinander folgende S wie 1 : 1,04. Hiernach ist es nun nicht schwer, sämtliche ausserhalb der Querschnitte wirkenden Kräfte zu finden. Im Kräftepolygon wird an das Gewicht 1 die Kraft S_3 angefügt, deren Richtung gegeben ist und deren Grösse sich gleich 1,04 S_2 ergibt; dann folgt das Ge-

wicht 2 und hierauf der Zapfendruck der zweiten Rolle (Kraft 3′) als Mittelkraft der Kräfte S_3 und S_4, von welchen letztere wiederum aus ersterer abgeleitet wird. Hieran schliessen sich die Gewichte 3 und 4, dann der Druck 5′ der dritten Rolle und das Gewicht 5; nun ist der Kettenzug S_5 anzufügen, welcher wieder in die Verticale zurückführt, und dann kommen die Gewichte 6 und 7.

Die nächste am Kran angreifende Kraft S_6 ist der horizontale Druck, mit dem derselbe den Rollenkranz und damit das Mauerwerk belastet. Dieser Druck wird gerade so wie in der vorigen Nummer durch Zerlegung der oberhalb vorhandenen Gewichte ermittelt; die Lage des Gesamtgewichtes ist jedoch hier, wo es sich aus verschiedenen Teilen zusammensetzt, zunächst noch unbekannt. Um sie zu finden, sind alle bisher aufgezählten Kräfte durch ein Seilpolygon verbunden worden; dazu wurde ein beliebiger, dicht über dem Krankopf wirkender Horizontalschub H angenommen und mit dem Pole O nach allbekannten Regeln ein Seilpolygon gezeichnet. Zu dessen Erläuterung ist nichts weiter zu bemerken, als dass die Last L und das Gewicht K der Einfachheit wegen als in ein und derselben Verticalen wirkend betrachtet wurden. Die einzelnen Seilpolygonseiten schneiden nun den Horizontalschub in Punkten I bis VII, durch welche die aufeinander folgenden Mittelkräfte gehen. Speziell durch VII geht die den Schnitt VII beanspruchende, vertical gerichtete Kraft. Sie trifft diesen Schnitt in einem ebenfalls mit VII bezeichneten Punkte und ist daselbst in eine horizontale Componente S_6 und eine schiefe, durch die Zapfenmitte gehende, Z, zerlegt worden.

Um nun schliesslich noch für die Schnitte VIII und IX die äussere Kraft der Lage nach zu erhalten, haben wir nicht das obige Seilpolygon fortgesetzt, sondern, was einfacher war, unten beginnend die Kraft Z mit den in der nämlichen Verticalen wirkenden Gewichten 10, 9 und 8 zusammengesetzt, wozu einfach drei durch die Zapfenmitte gelegte Parallelen zu den im Kräftepolygon bereits vorhandenen Mittelkräften nötig waren.

Wir kennen jetzt alle ausserhalb der Schnitte I bis X wirkenden Kräfte und gehen zur Bestimmung der inneren Spannungen über.

Bei der Construction der Trägheitsmomente der einzelnen Schnitte, der Kurven der $\tau b z$ und der σ_{max} wiederholen sich die in der Nummer 24 erläuterten Arbeiten. Wir begnügen uns daher damit, hier das hervorzuheben, wodurch sich die gegenwärtigen Constructionen von jenen unterscheiden.

In den Querschnitten, welche in der Figur 3 im Massstab 1 : 50 dargestellt sind, wurden alle Blech- und Winkeleisendicken gleich 1,2 *cm* angenommen. Als Verwandlungsbasis a wurden 2,4 *cm* gewählt, so dass die Δr stets gleich den halben Längen der Platten und Winkeleisen sind. Die erste Poldistanz b beträgt $41^2/_3$ *cm*, so dass $a\,b = 100\ cm^2$ wird. Als zweite Poldistanz wurde wie früher die halbe Balkenhöhe e genommen.

Bei der Construction der statischen und der Trägheitsmomente der verschiedenen Querschnitte beschränkte man sich wegen der Symmetrie durchgehends auf die Hälfte; der Abschnitt des zweiten Polygons ist daher gleich $^1/_2\,t$ und wurde stets mit dem Zirkel verdoppelt.

In der Figur 1 wurden nun für sämtliche Schnitte die in den äussersten Kanten wirkenden Normalspannungen bestimmt. Dabei haben wir zunächst die ausserhalb wirkende Kraft je in eine Normal- und eine Transversalcomponente, P und Q, zerlegt und hierauf erstere nochmals in ein Kräftepaar M und eine gleich grosse, im Schwerpunkt angreifende Normalkraft übergeführt. Die vom Kräftepaar oder, was dasselbe bedeutet, vom Biegungsmomente in der äussersten Kante des Querschnittes erzeugte Spannung sei σ, die von der centralen Normalkraft herrührende σ'. Dann herrscht an der einen äussersten Kante die Summe $(\sigma + \sigma')$, an der andern die Differenz $(\sigma - \sigma')$ dieser Spannungen.

Es ist nun wie in den Nummern 23 und 24 $J = a\,b\,e\,t$ und demzufolge $\sigma\,a\,b\,t$ gleich dem Biegungsmomente M der äusseren Kraft; es wurde daher für jeden Schnitt die äussere Kraft in richtiger Lage und im Massstab $1\ t = 1\ mm$ (also halb so gross wie in der Figur 2) aufgetragen, in Normal- und Transversalcomponente zerlegt und erstere aus dem Schwerpunkt des Schnittes projicirt. Das Projectionsdreieck stellt dann das halbe Biegungsmoment dar. Verwandelt man es in ein Dreieck, dessen eine Kathete gleich t ist, so stellt die andere $\sigma\,a\,b$ dar. Für den Schnitt V sind die beiden gleich grossen Dreiecke schraffirt, für die übrigen Schnitte aber nur die Endpunkte der zur Verwandlung dienenden Parallelen ausgezogen und mit den betreffenden Buchstaben versehen worden.

Die von der centralen Normalkraft bewirkte Spannung wird $\sigma' = \frac{P}{F}$ oder, da F gleich $a\,r$ ist,

$$\sigma'\,a\,b = \frac{P\,b}{r}.$$

Diesen Wert haben wir in der Figur 1 für jeden Schnitt auf der Richtungslinie der Kraft P dadurch bestimmt, dass wir letztere mit dem Verhältnis $^1/_2 b : {}^1/_2 r$ multiplicirten, wozu ebenfalls zwei parallele Linien ausreichten. Die betreffenden Constructionslinien sind wiederum für den Schnitt V ausgezogen, für die übrigen bloss angedeutet worden.

Nun wirkt in jedem Schnitt auf der der äussern Kraft zugekehrten Seite die Spannung $\sigma + \sigma'$, auf der abgewendeten Seite die Spannung $\sigma - \sigma'$. Die Werte $\sigma' a b$ wurden daher mittelst eines kleinen Halbkreises auf die Schnittrichtung übertragen und so die Werte $(\sigma + \sigma') a b$ und $(\sigma - \sigma') a b$ erhalten.

Fast noch rascher gelangt man zu diesen Werten, wenn man von dem auf der Seite 56 stehenden Satze Gebrauch macht, dass die Randspannung gleich dem Kernmoment dividirt durch das Widerstandsmoment ist. Zu diesem Behufe bestimmt man zunächst für jeden Schnitt den Kernradius

$$k = i^2 : e = \frac{J}{F} : e = \frac{a b e t}{a r} : e = \frac{b t}{r},$$

indem man (Fig. 3) durch den Endpunkt von $^1/_2 t$ eine Parallele zum ersten Strahl des ersten Kräftepolygons zieht. (Im Querschnitte IX ist dieses geschehen.) Trägt man dann die erhaltene Strecke in den Schnitten der Figur 1 vom Schwerpunkt aus nach beiden Seiten auf und bildet die Momentendreiecke nicht mit dem Schwerpunkte, sondern mit den beiden Kernpunkten, so bekommt man durch die Division mit t sofort die obigen Werte.

In der Figur 3 wurden nun die verschiedenen Kräfte von der Axe der Querschnitte aus aufgetragen und zwar die $(\sigma + \sigma') a b$ je oben nach links, die $(\sigma - \sigma') a b$ je unten nach rechts; dann bestimmen die Verbindungslinien der Endpunkte die an jeder Stelle herrschende Normalspannung. Wo diese Linien die verticale Mittellinie schneiden, ist die Spannung gleich null; durch diesen Punkt geht somit in jedem Querschnitte die neutrale Axe, welche die gedrückten Flächenelemente von den gezogenen scheidet. Nach früher (Nr. 13, Seite 55) ist die neutrale Axe die Antipolare des Angriffspunktes der äusseren Kraft hinsichtlich der Centralellipse des Querschnittes. Dieser Satz kann als Probe für die richtige Construction der σ benützt werden. Da alle äusseren Kräfte in der Mittelebene des Kranes wirken, so genügt es, zu diesem Behufe den verticalen

Halbmesser der Centralellipse zu bestimmen; dieser ist $i = \sqrt{k e}$ und wird durch einen Halbkreis, welcher die Strecken k und e überspannt, bestimmt. Für den Schnitt IX ist auch diese Construction ausgeführt worden. Trägt man dann i von S aus nach rechts auf, so kann mittelst eines rechten Winkels der zum Angriffspunkt A antipolar liegende Punkt N bestimmt werden. Dieser fällt in der That mit dem Nullwert von σ zusammen.

Wenn man es vorzieht, kann man auf diesem Wege auch die σ-Linie finden, ohne den von der directen Pressung herrührenden Teil σ' zu bestimmen. Man trägt zu diesem Zwecke oben und unten einfach $\sigma a b$ auf, verbindet die erhaltenen Punkte und zieht durch N eine Parallele zur Verbindungslinie.

Die punktirten, durch N gelegten Linien, welche die Normalspannungen halbiren, enthalten nun wie früher die Mittelpunkte der Halbkreise, welche zur Zusammensetzung der σ mit den τ dienen.

Um diese letzteren zu erhalten, wurde ganz so, wie es auf der Tafel 3 (siehe die Erklärung in Nr. 24) geschehen ist, durch den Pol des zweiten Kräftepolygons eine Linie gezogen, welche mit e einen Winkel bildet, dessen Tangente gleich $\frac{t}{b}$ ist, und auf dieser Linie der Punkt bestimmt, dessen Abscisse in Bezug auf e gleich Q, gleich der Transversalcomponente der äusseren Kraft ist. Die Verlängerung dieser Abscisse wird dann von den Strahlen des zweiten Kräftepolygons in Punkten geschnitten, deren Abscissen gleich $\tau b z$ sind und durch Uebertragung mit dem Zirkel zu den mit *sch* (scherende Kräfte) bezeichneten Kurven führen.

Um hieraus die $\tau a b$ zu bekommen, sind (vergleiche die vorletzte Nummer) die $\tau b z$ mit $\frac{a}{z}$, das ist mit 1, $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{10}$ zu multipliciren, je nachdem es sich um den nackten Steg ($z = 2{,}4\ cm = a$), um dessen Verbindung mit den Winkeleisen ($z = 4{,}8\ cm = 2\ a$) oder um die Horizontalflantschen der Winkeleisen ($z = 24\ cm = 10\ a$) handelt. Man erhält daher die $\tau a b$ direct in der Verticalen, wo man sie nötig hat, indem man durch die Endpunkte der $\tau b z$ Linien zieht, die mit den Strahlen des Büschels der Figur 4 parallel laufen. Diese Parallelen wurden nicht ausgezogen; sie können, falls man controlliren will, leicht wieder erhalten werden. Ihre Endpunkte geben mit den Punkten der $\frac{1}{2} \sigma a b$-Linie die Radien der Halb-

kreise, und durch Herunterschlagen dieser Radien gelangt man zu den Kurven der Maximal-Spannungen und -Pressungen.

Zu gleicher Zeit erhält man hierbei die Richtungen, in welchen das Material scherend nicht in Anspruch genommen wird. Diese Richtungen sind in der Figur 3 links auf einer und derselben Verticallinie für alle Schnitte als Kreuzchen aufgetragen worden. Nachdem man hierauf diese Kreuze in die Figur 1 übertragen hatte, konnten ganz wie auf der Tafel 3 die Trajectorien eingezeichnet werden, welche die Richtung der stärksten normalen Inanspruchnahme des Metalles angeben. Zwischen den Schnitten VI und VII laufen diese Kurven vertical, weil innerhalb dieser Strecke keine transversalen Kräfte vorkommen. Zugleich sind die N-Punkte, in welchen die σ null sind, durch eine continuirliche Linie verbunden worden, welche ziemlich parallel mit der (strichpunktirten) Axe des Kranes verläuft.

Die Druckspannungen auf der inneren Seite des Krans sind, wie zu erwarten stand, grösser als die Zugspannungen auf der äusseren Seite; dem entsprechend übertreffen auch die Kräfte längs den Druckkurven im Durchschnitt diejenigen der Zugkurven. Erstere sind etwas stärker ausgezogen worden als letztere.

Im Weiteren lassen sich unserem Kräfteplan noch die folgenden Resultate entnehmen:

Die grösste aller Spannungen findet sich im Schnitte V und beträgt (bei 10 Tonnen Traglast) 34 Tonnen auf $a\,b = 100\ cm^2$ oder 0,34 Tonnen pro cm^2; der Kran könnte somit nahezu die doppelte Last tragen. Der grösste Wert, den die transversale Spannung τ annimmt, ergibt sich im Schnitte IX zu 0,15 t pro cm^2.

In allen Schnitten mit Ausnahme von I und IX tritt die grösste Spannung in den äussersten Kanten ein; in den beiden genannten Schnitten sind jedoch die normalen Spannungen verhältnismässig klein. Es würde daher im vorliegenden Falle genügen, sich bei der Berechnung der Dimensionen auf die normalen Kräfte im Querschnitte zu beschränken. Letztere rühren in erster Linie von den Biegungsmomenten her; doch dürften die von der directen Pressung hervorgerufenen Spannungen nicht vernachlässigt werden.

Die von der Kette herrührenden Kräfte S_3 bis S_5 üben zwar, da sie in der Nähe der Kranaxe verlaufen, keinen grossen Einfluss aus; doch wird es stets ratsam sein, sich von deren Bedeutung eine klare Vorstellung zu machen, bevor man sich entschliesst, sie zu

vernachlässigen. Ihrem Dasein ist es zum Teil zuzuschreiben, dass die Spannungen in den Schnitten III bis V höher steigen als in den folgenden, für welche doch der Hebelsarm der Last L grösser ist.

In der Praxis wird es also wohl immer hinlänglich genau, jedenfalls am förderlichsten sein, nach vorläufig angenommenen Dimensionen das Kräfte- und Seilpolygon (Figuren 1 und 2) zu construiren und dann für einige Schnitte, für welche das Moment der äusseren Kräfte gross wird, die Widerstandsmomente, beziehungsweise die grössten Normalspannungen zu bestimmen.

27. Die Zug- und Druckkurven in cylindrischen Wellen.

(Tafel 5.)

Um zum Schluss auch noch ein Beispiel von räumlichen (doppelt gekrümmten) Zug- und Druckkurven zu behandeln, haben wir auf der Tafel 5 die betreffenden Constructionen für eine cylindrische Welle ausgeführt, die neben Biegungskräften auch noch Torsionsmomente auszuhalten hat. Zwar bieten einfach auf Biegung beanspruchte Balken ebenfalls Gelegenheit zum Zeichnen von doppelt gekrümmten Trajectorien; denn wie in der Nummer 17, Seite 72, gezeigt worden ist, lässt sich ein solcher Balken den im Querschnitt existirenden Schubkurven entlang in dünne Schalen zerlegen, deren jede ein selbständiges System von Zug- und Druckkurven besitzt. Die verschiedenen Liniensysteme weichen jedoch von demjenigen der Mittelebene, mit dem wir uns bis jetzt ausschliesslich beschäftigt haben, so wenig ab, dass sie sich in der Längsansicht des Balkens nahezu decken. Anders liegen jedoch die Verhältnisse bei Balken, welche auf Torsion in Anspruch genommen werden, weil die Spannungstrajectorien in diesem Falle spiralförmig verlaufen.

Als Beispiel haben wir einen cylindrischen Balken von 4 *cm* Durchmesser und 15 *cm* Länge gewählt, auf welchen an dem einen Ende eine um 4,5 *cm* vom Mittelpunkt entfernte Transversalkraft Q von 80 *kg* einwirkt, während das andere Ende festgehalten oder eingespannt gedacht werden kann. Der Balken hat daher ein Torsionsmoment von 3,6 *mkg* und ausserdem ein Biegungsmoment zu ertragen, das gegen das festgehaltene Ende hin allmälig bis auf 12 *mkg* zunimmt.

Diese Belastungsverhältnisse kommen zwar in der Praxis kaum

vor; in der Regel wird da, wo ein Torsionsmoment zur Wirkung gelangt, das Biegungsmoment möglichst erniedrigt, und zwar dadurch, dass durch geeignete Wahl der Unterstützungspunkte entweder die freie Länge des Balkens beschränkt oder die Transversalkraft Q auf einen kleinen Wert zurückgeführt wird. Um die gemeinsame Wirkung von Drehung und Biegung auf den Verlauf der Trajectorien deutlich zum Ausdruck zu bringen, mussten wir daher zu etwas ungewöhnlichen Verhältnissen greifen.

Nach der Nummer 17, Seite 74, bilden die Schubkurven im Querschnitt, wenn neben dem Torsionsmomente M_t noch eine Scherkraft Q vorhanden ist, einen Kegelschnittbüschel, welcher am bequemsten rechnerisch mittelst der Gleichung

$$c\,(x^2 + y^2 - r^2) = (2\,x + 3\,q)^2$$

bestimmt wird. In dieser bedeutet c eine willkürliche Constante (den Parameter), r den Radius der Welle und q den Hebelarm von Q. In unserem Falle ist $r = 2\ cm$ und $q = 4{,}5\ cm$ zu setzen. Da q grösser als $^2/_3\,r$ ist, so besitzt der Büschel keine reellen Grundpunkte; es kommen somit nur ganze, geschlossene Ellipsen in Betracht und selbstverständlich nur diejenigen, die innerhalb des Kreises liegen. Zu diesem Zwecke muss (vergleiche Seite 75) der Parameter c zwischen $4 - \frac{9\,q^2}{r^2}$ und $-\infty$, also in unserem Falle zwischen $-41{,}56$ und $-\infty$ liegen.

Es wird ferner nach früher die Abscisse des Mittelpunktes einer Kurve

$$m = \frac{6\,q}{c-4} = \frac{27}{c-4},$$

die halbe horizontale Axe

$$a = \frac{\sqrt{9\,c\,q^2 + c\,(c-4)\,r^2}}{c-4} = \frac{\sqrt{166^1/_4\,c + 4\,c^2}}{c-4}$$

und die halbe verticale Axe

$$b = \sqrt{r^2 + \frac{9\,q^2}{c-4}} = \sqrt{4 + \frac{182^1/_4}{c-4}}$$

Setzt man nun nacheinander

$c =$	$-41{,}56$	-42	-45	-50	-60	-75	-100	-200	$-\infty$,

so wird

$m =$	$-0{,}59$	$-0{,}59$	$-0{,}55$	$-0{,}50$	$-0{,}42$	$-0{,}34$	$-0{,}26$	$-0{,}13$	$0{,}00\ cm$
$a =$	$0{,}00$	$0{,}19$	$0{,}51$	$0{,}76$	$1{,}04$	$1{,}27$	$1{,}47$	$1{,}75$	$2{,}00\ cm$
$b =$	$0{,}00$	$0{,}20$	$0{,}53$	$0{,}79$	$1{,}07$	$1{,}30$	$1{,}50$	$1{,}76$	$2{,}00\ cm$

Auf der Tafel $5_{1.2}$ ist der Balken in natürlicher Grösse dargestellt und es sind nach obigen Zahlenwerten sieben Ellipsen in den Kreis eingezeichnet worden, davon zwei etwas stärker; für diese letztern sowie für den Kreis selbst haben wir sodann in den Figuren 4 die Maximalspannungen und die denselben entsprechenden Schnittrichtungen construirt. Zu diesem Zwecke wurden die drei Kurven in gerade Linien, das heisst die Cylinderflächen in Ebenen ausgestreckt und als Rechtecke aufgetragen. Da für je zwei zur horizontalen Mittelebene symmetrisch liegende Punkte die Schubspannungen gleich gross, die Normalspannungen entgegengesetzt gleich sind, so konnten wir uns darauf beschränken, von jeder der abgewickelten Flächen die Hälfte zu zeichnen; wir haben die obere gewählt; die Kurven der σ_{max} und σ_{min} passen dann auch für die untere Hälfte, wenn man sie um die Verticale umwendet, und die Zug- und Druckkurven für die untere Hälfte erhält man sofort, wenn man diejenigen der oberen Hälfte um die horizontale Mittellinie der abgewickelten Fläche umklappt. In der Ansichtsfigur bewegen sich die Trajectorien hinsichtlich der Balkenaxe genau symmetrisch.

Bei der Abwicklung wurden die drei Kurven in beziehungsweise zehn, acht und vier gleiche Teile geteilt und für die Teilpunkte jeweilen die σ, τ und σ_{max} bestimmt.

In der Figur 3 haben wir in üblicher Weise das Trägheitsmoment des Querschnittes construirt; nur wurde letzterer, um Platz zu sparen, nicht in horizontale, sondern in verticale Streifen zerlegt, was beim Kreise natürlich denselben Erfolg hat. Als Verwandlungsbasis diente $a = 2\ cm$, als erste Poldistanz $b = 2{,}5\ cm$, als zweite $e = 2\ cm$. Als Widerstandsmoment fanden wir $a\,b\,t = 6{,}25\ cm^3$, was mit dem berechneten Werte $\frac{1}{4}\pi\, r^3 = 6{,}283\ cm^3$ gut übereinstimmt; das polare Widerstandsmoment ist (vergl. Seite 71) doppelt so gross, also gleich $12{,}5\ cm^3$.

Gleichwie in den vorhergehenden Nummern wurden nun (Fig. 3) mit $Q = 80\ kg$ die $\tau'\,b\,z$ und hiernach die $\tau'\,a\,b$ bestimmt. Von O geht wie früher eine schiefe Linie OP aus, deren Neigungswinkel gleich $arc\ tang\ \frac{t}{b}$ ist; da wo diese mit dem horizontalen Strahl die Kraft Q einschliesst, wurde eine Verticale gezogen; dann schneidet auf dieser der Strahlenbüschel aus O die $\tau'\,b\,z$ ab; eine kleine Multiplication führt hierauf zu den $\tau'\,a\,b$; die entsprechenden

Kurven sind in der Figur 1 aufgetragen; als Kräftemassstab wurde 1 *mm* = 4 *kg* gewählt. Die Kurve der $\tau' a b$ ergibt sich nach der Rechnung (wie beim Rechteck) als eine Parabel, was als Probe dienen kann.

Nach der Nummer 15, Seite 61, stellt nun τ' zunächst bloss die Verticalcomponente der von Q erzeugten Scherspannung dar und ist für eine Kreissehne AB constant; zu dieser kommt noch eine horizontal gerichtete Spannung τ'' hinzu, welche (vergleiche die Textfigur 23 auf der Seite 69) so gross zu wählen ist, dass die Mittelkraft beider den verticalen Kreisdurchmesser in demselben Punkte D schneidet, wie die in A und B an den Kreis gelegten Tangenten. Hiernach ist die Mittelkraft von τ' und τ'' für einen gegebenen Punkt leicht zu bestimmen; man braucht zu diesem Zwecke bloss ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, dessen verticale Kathete gleich τ' und dessen Hypotenuse parallel CD ist. Da aber die Kräfte $\tau' a b$ auf der Tafel horizontal aufgetragen sind, so werden die $\tau'' a b$ durch Senkrechte zu CD abgeschnitten, wie es für den Punkt C in der Figur 1 gezeigt ist.

Nun haben wir noch die Torsionsspannungen τ_t hinzuzufügen. Diese sind dem Radius von C proportional. Im Kreisumfang ist diese Spannung gleich dem Torsionsmomente, dividirt durch das polare Widerstandsmoment, also gleich $\frac{Q q}{2 a b t}$, folglich

$$\tau_t a b = \frac{Q q}{2 t}.$$

Diese in der Figur 3 auf einfache Weise bestimmte Grösse wurde als Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes verwendet, dessen Hypotenuse gleich $3 r$ ist; nun hat man bloss den Radius des Punktes C von R aus mit dem Zirkel dreimal auf der Hypotenuse abzutragen und dann den Abstand von der verticalen Kathete abzugreifen, um die in C wirkende Torsionsspannung zu erhalten. Fügt man sie noch in der Figur 1 parallel zum Radius an τ'' an, so bekommt man die Gesamtspannung. Wird richtig construirt, so läuft diese senkrecht zur Ellipsentangente im Punkte C.

Diese Construction wurde nun für jeden der Teilpunkte der drei stark ausgezogenen Schubkurven wiederholt. Das Ergebnis dieser Arbeit sind die in den Figuren 4 links gezeichneten Kurven der $\tau a b$. Sie zeigen, dass die Scherspannung in einer und derselben Schubkurve abnimmt, je weiter man sich von der Kraft Q

entfernt.—Um Platz zu sparen, wurden die Spannungen in der Figur 4 halbirt aufgetragen; man hat sie daher im Massstabe 1 *mm* = 8 *kg* abzugreifen.

Um sodann die Normalspannungen σ zu erhalten, ist zunächst die grösste aller vorkommenden bestimmt worden; sie beträgt

$$\sigma\, a\, b = \frac{Q \, . \, l}{t} = 960 \; kg.$$

Die Hälfte dieses Wertes wurde im Massstab 1 *mm* = 8 *kg* in der Figur 1 auf der horizontalen Kreistangente aufgetragen und den angenommenen sieben Querschnitten gemäss in sechs gleiche Teile geteilt; verbindet man die Teilpunkte mit dem Mittelpunkte, so schneiden die Verbindungslinien auf den Horizontalen durch die Punkte C die entsprechenden $^1/_2 \sigma\, a\, b$ ab. Diese wurden in die Figuren 4 übertragen und dort zu den Kurven der $^1/_2 \sigma\, a\, b$ zusammengefügt, von denen wir in jedem Felde die den Schnitten IV und VII zugehörigen punktirt ausgezogen haben.

Nun erfolgte ganz wie früher die Construction der Maximalspannungen vermittelst der bekannten Halbkreise, das Markiren der Kreuzchen und das Einzeichnen der Zug- und Druckkurven. Für die Schnitte IV und VII wurden die Kurven der σ_{max}, für erstere auch diejenigen der σ_{min} gestricht ausgezogen. Zum Schluss wurden einige der Zug- und Druckkurven in die Figur 2 übertragen und dort (die Druckkurven etwas stärker) voll oder punktirt ausgezogen, jenachdem sie auf der dem Auge zugekehrten oder auf der abgewendeten Seite liegen.

Die grösste aller Normalspannungen tritt im Endquerschnitt (VII) ein, und zwar fast genau in den Endpunkten des verticalen Kreisdurchmessers (Punkt 6); sie beträgt nach der Zeichnung, auf $a\, b$ bezogen, 980 *kg*, auf den Quadratcentimeter somit 196 *kg*, während wir oben ohne Rücksicht auf die Schubkräfte 960 beziehungsweise 192 *kg* gefunden hatten. Die grösste Transversalspannung (welche bekanntlich gleich der Differenz zwischen σ_{max} und $^1/_2 \sigma$ ist) findet sich nahezu an der nämlichen Stelle gleich 499 *kg* für $a\, b$, also gleich 100 *kg* für den Quadratcentimeter, während die blosse Torsionsspannung nur 29 *kg* beträgt. Selbstverständlich werden sich diese Zahlen je nach dem Verhältnis des Biegungsmomentes zum Torsionsmomente von Fall zu Fall ändern.

Die Zug- und Druckkurven bilden Schraubenlinien von wechselndem Steigungswinkel; da wo sie die horizontale Mittelebene des

Cylinders schneiden, bilden sie mit dieser Winkel von 45°; in der oberen Cylinderhälfte verlaufen die Zugkurven flacher, in der unteren steiler, die Druckkurven umgekehrt. Beschränken sich die äusseren Kräfte auf ein Torsionsmoment, so werden die Schubkurven im Querschnitte zu concentrischen Kreisen und die Zug- und Druckkurven zu Schraubenlinien mit dem constanten Neigungswinkel von 45°.

28. Die Spannungstrajectorien in der Natur.

Dem Anatomen ist die Thatsache schon längst bekannt, dass die Knochen des Menschen und der Wirbeltiere im Innern an zahlreichen Stellen ein scheinbar regelloses, schwammiges Gefüge besitzen. Während die Knochensubstanz nach aussen eine dichte, compacte Masse darstellt, löst sie sich nach innen in einzelne Stäbchen und Blättchen auf. Diese zellen- oder porenförmige Structur, die sogenannte Spongiosa, lässt sich schon beim Neugeborenen erkennen, tritt aber bei fortschreitendem Wachstum, während die Knorpelsubstanz verkalkt, immer deutlicher hervor. Bei den meisten Knochen lässt sich nun zwar in der Anordnung der Knochenteilchen keine Gesetzmässigkeit herauslesen; andere dagegen zeigen bei einiger Aufmerksamkeit eine deutliche, immer wiederkehrende Regelmässigkeit in der Structur der Spongiosa. Am auffallendsten tritt diese beim menschlichen Oberschenkelknochen auf. Ein frontaler Längsschnitt durch dessen oberen Teil zeigt unverkennbar, dass die kleinen Knochenstäbchen zwei Systeme von gebogenen, sich durchkreuzenden Linien bilden.

Fig. 47.



Die Figur 47 stellt in halber natürlicher Grösse den Schnitt durch den Hüftknochen eines 31-jährigen Mannes dar.*) Man sieht, dass die compacte Masse des Röhrenknochens nach oben

*) Diese Figur ist der Arbeit von Dr. Julius Wolff über „die innere Architektur der Knochen etc." entnommen. (Berlin 1870.)

hin allmälig dünner wird und sich dabei in einzelne Fasern auflöst. Mehr und mehr zweigen sich links und rechts gebogene Fäden oder Stäbchen ab und vereinigen sich zu einem zellenförmigen Gerüste. Die Richtung dieser Fäden lässt sich meistens klar erkennen; sie verlaufen stellenweise parallel zueinander, dann breiten sie sich wieder fächerförmig aus und spalten sich hierbei in zwei oder mehr einzelne Zweige. Ueberall aber, wo ein Stäbchen des linksseitigen Büschels einem Stäbchen des rechtsseitigen begegnet, da durchkreuzen sie sich unter rechtem Winkel, so dass sie zusammen stets quadratische oder rechteckige Hohlräume bilden.

Freilich lassen sich nicht sämtliche Fasern bis ans Ende deutlich verfolgen; sie bewegen sich stellenweise etwas unsicher und gehen auch gelegentlich ganz verloren; ferner besitzen die einzelnen Zellen keine mathematisch genaue rechtwinklige Form. Aber wie im Wasserfalle die einzelnen Wasserfäden sich durcheinander schlingen, und am Rande zerstäuben, während doch die Masse als Ganzes die parabolische Linie des freien Falles verfolgt, so springen auch in der Spongiosa des Hüftknochens bei allen Unregelmässigkeiten im Einzelnen, sobald man das Ganze überblickt, die zwei charakteristischen Kurvensysteme aufs unverkennbarste ins Auge.

Schneidet man den Oberschenkelknochen in sagittaler Richtung (von vorn nach hinten), so treten die sich kreuzenden Linien ebenfalls zum Vorschein, doch lange nicht so bestimmt, wie beim frontalen Schnitte. Deutlicher zeigen sie sich dagegen, wenn man den Knochen in der Höhe des Trochanter minor quer durchschneidet. Ein weiter oben, durch den Kopf des Knochens geführter Querschnitt liefert wieder ein unregelmässiges Gefüge.

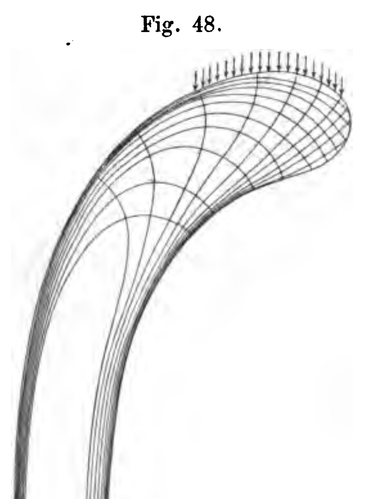
An den übrigen Knochen des Menschen ist diese Erscheinung noch vielfach zu beobachten, besonders deutlich am Fersenknochen. Auch die Knochen der Säugetiere bieten, wie zu erwarten steht, zahlreiche Beispiele zu dem gesetzmässigen Aufbau der zellenförmigen Masse.

Das Verdienst, die statische Bedeutung dieser eigentümlichen Anordnung der Knochensubstanz erkannt zu haben, gebührt den Zürcher Professoren Hermann v. Meyer und Culmann. Als ersterer im Jahre 1866 in der Zürcher Naturforschenden Gesellschaft einige seiner Knochenpräparate vorwies und dabei auf die Architektur der Spongiosa aufmerksam machte, da erkannte der anwesende Begründer der Graphischen Statik, dass die merkwürdige Anordnung dieses

zellenförmigen Gebildes den Spannungstrajectorien belasteter Balken entspreche. Ganz besonders fiel Culmann die Uebereinstimmung des Verlaufes der Knochenfasern im Oberschenkel mit demjenigen der Zug- und Druckkurven in einem gebogenen Krane auf, wie sie unter seiner Leitung nicht lange vorher gezeichnet worden waren. Der Oberschenkel erschien ihm als ein kranförmig gebogener Balken, der an seinem oberen Ende eine seitliche Last, das Gewicht des menschlichen Körpers, zu tragen hat.

Sofort liess er auf Grund dieser Auffassung die Zug- und Druckkurven in einem Hüftknochen construiren. Um der Bedingung zu genügen, dass der Querschnitt des Balkens sich nur wenig und allmälig ändern dürfe, wurden hierbei die dornförmigen, Trochanter major und minor genannten Knochenfortsätze weggelassen und auch das kugelförmige Ende des Knochens etwas modificirt; ferner wurde der Knochen absichtlich nicht als Röhre, sondern als geschlossener homogener Körper vorausgesetzt, damit es um so deutlicher in die Augen springe, dass die Anordnung der Knochensubstanz den statischen Anforderungen entspreche. Im Uebrigen wurde die Form des natürlichen Knochens möglichst treu nachgezeichnet. Als Belastung nahm man 30 *kg* an und setzte voraus, dass diese sich gleichförmig über eine gewisse Strecke des oberen Balkenstückes verteile.

Fig. 48.



Der Gang, welcher bei der Construction der Zug- und Druckkurven eingeschlagen wurde, war genau derselbe, wie bei der Untersuchung des Blechkrans (Tafel 4), nur mit dem Unterschied, dass hier das eigene Gewicht des Balkens vernachlässigt und bloss die obgenannte Last in Berücksichtigung gezogen wurde. Das Ergebnis dieser Arbeit wird durch die Figur 48 dargestellt. Von den Zug- und Druckkurven sind je 10 eingezogen worden. Man sieht, dass ihr Verlauf mit demjenigen der Knochenfasern in der Figur 47 in überraschender Weise übereinstimmt. Im oberen Teil des Balkens entsteht ein zellenförmiges, die Fläche ausfüllendes Gewebe; im unteren dagegen bilden sich zwei durch einen

leeren Raum getrennte Streifen, in welchen sich die Kurven dicht aneinander herandrängen.

So vortrefflich nun aber Construction und Wirklichkeit miteinander übereinstimmen, so sehr man geneigt wäre, diese Uebereinstimmung als eine sichere Bestätigung der der Construction zu Grunde liegenden Voraussetzungen anzusehen, so lassen sich doch gegen die Richtigkeit der Annahme, dass der Hüftknochen ein kranartig tragender Balken sei, gewichtige Bedenken erheben.

Zunächst müsste es, wenn es sich bestätigte, auffallend erscheinen, dass die Natur für Zug- und Druckwirkungen die nämliche Substanz verwendet, während wir sonst für verschiedene Zwecke auch verschiedene Mittel in Verwendung finden.

Sodann muss aber namentlich betont werden, dass der Oberschenkel nicht einfach durch das Gewicht des über ihm befindlichen Körpers statisch beeinflusst wird, sondern dass sich an ihm verschiedene Sehnen und Bänder anheften, deren Wirkung durchaus nicht zu vernachlässigen ist, sondern vielleicht diejenige des Körpergewichtes an Stärke noch übertrifft. Diese Sehnen und Bänder greifen jedoch an so zahlreichen Stellen der Knochenoberfläche und in so verschiedener Richtung an, dass man die Aufgabe als eine räumliche anzusehen hat; es dürfte daher schwierig werden, sämtliche Einflüsse in Rechnung zu ziehen, ganz abgesehen davon, dass die vorhandenen Kräfte beim Liegen und Sitzen, Stehen und Gehen beständigem Wechsel unterworfen sind.

So viel wir wissen, hat Professor Zschokke an der Zürcher Tierarzneischule zuerst die Ansicht ausgesprochen, dass im Inneren des Knochens keinerlei Zugwirkungen vorkommen, sondern dass die Knochensubstanz überall nur Druckspannungen auszuhalten habe. Damit fiele selbstverständlich die Zulässigkeit unserer oben beschriebenen graphischen Bestimmung der Zug- und Druckkurven gänzlich dahin. Von Zugkurven könnte überhaupt nicht mehr die Rede sein, und es hätte den Anschein, als ob der so interessante Zusammenhang zwischen der Verteilung der Knochensubstanz und deren statischer Wirkung völlig verloren ginge.

Wenn nun auch eine aufmerksame Prüfung des Sachverhaltes zwar noch nicht zu einer unzweifelhaften Bestätigung der Zschokkeschen Behauptung führt, so erscheint diese doch immerhin als wahrscheinlich. Zunächst erkennt man bald, dass mehrere, in charakteristischer Weise beanspruchte Knochen (so namentlich die

Schenkelknochen, die Fussknochen u. a.) von aussen grösstenteils pressende Kräfte aufnehmen, so dass man mit Sicherheit annehmen kann, dass in ihrem Inneren die Druckspannungen bei weitem überwiegen. Sodann muss es auffallen, dass die meisten durch Sehnen oder Bänder ausgeübten äusseren Kräfte tangential zur Knochenoberfläche wirken, und dass da, wo ein Muskel sich mehr oder weniger normal ansetzt, stets eine kleine Vertiefung oder Aushöhlung vorhanden ist, deren Grund frei bleibt, während die Seitenwand die Spannung in transversalem Sinne aufnimmt. So lange nun die Oberflächenkräfte nur normal pressend oder tangential auftreten, ist das ausschliessliche Vorkommen von inneren Druckspannungen immerhin denkbar. Der Spannungszustand im Inneren der Knochen gehört dann (im Sinne der Nrn. 8—10) zu denjenigen, bei welchen der Ordnungskegel des Spannungsellipsoides imaginär ist und sämtliche Spannungen gleiches Zeichen besitzen.

Damit braucht jedoch die Bedeutung der Knochenfasern in der Spongiosa als Spannungstrajectorien durchaus nicht verloren zu gehen. Es wäre auch gar zu merkwürdig, wenn diese Fasern ganz den Gesetzen der Trajectorien folgten, ohne mit diesen irgend einen inneren Zusammenhang zu besitzen. Das Wahrscheinlichste ist vielmehr, dass die Spongiosa wirkliche Spannungskurven darstellt; nur sind diese, entgegen der früheren Ansicht, keine Zug- und Druckkurven, sondern ausschliesslich Druckkurven.

Ob es je gelingen wird, diese Kurven auf Grundlage gegebener äusserer Kräfte zu berechnen oder zu zeichnen, lässt sich schwer sagen. Die Aufgabe ist zweifellos eine sehr schwierige und verwickelte und mit unseren heutigen Kenntnissen und Hülfsmitteln kaum durchführbar, selbst wenn uns die wirkenden Kräfte ihrer Grösse nach bekannt wären.

Nur vorübergehend sei noch die Frage gestreift, wie die besprochene Erscheinung erklärt werden könnte. Soll man die eigentümliche Anordnung der Knochenmasse als ein zufälliges Gebilde ansehen, das sich im Kampf ums Dasein als das zweckmässigste erhalten hat und sich nun von Geschlecht zu Geschlecht vererbt? Oder entstehen die Kurven in jedem Individuum immer wieder aufs neue unter der Wirkung bestimmter äusserer Belastungen? Im letzteren Falle müsste man sodann noch den Gründen nachforschen, weshalb die Knochensubstanz sich gerade in den Linien stärkster Pressung ablagert. Diese Fragen zu beantworten, kann zwar nicht

Aufgabe der graphischen Statik sein; doch können wir nicht umhin zu bemerken, dass die frühzeitig, sogar schon vor der Geburt beginnende Ausbildung der Spongiosa nicht notwendig gegen die zweite Annahme spricht. Denn wie schon oben bemerkt wurde, wird der menschliche Oberschenkelknochen nicht erst beim Stehen und Gehen von äusseren Kräften in Anspruch genommen, sondern sobald die Muskeln und Gelenkbänder in Thätigkeit treten, und bekanntlich geschieht dieses schon im embryonalen Zustande. Man wird überhaupt annehmen müssen, dass auch im Zustande der Ruhe gewisse Kräfte vorhanden sind, die sich gegenseitig das Gleichgewicht halten; dabei bilden die Knochen die Druck-, die Muskeln und Bänder die Zugorgane. Bei körperlicher Anstrengung treten beide Teile in stärkere Wirkung. Bewegung dagegen entsteht, wenn das Gleichgewicht irgendwo gestört wird.

Das Thema ist jedenfalls interessant genug, um statisch gebildete Anatomen zu eingehenderem Studium anzuspornen. —

Unwillkürlich drängt sich Einem schliesslich noch die Frage auf, ob die Spannungskurven nicht auch an anderen Orten in der Natur sichtbar auftreten. In so auffallender, schöner Weise wie in den Knochen sind sie bis jetzt nirgends aufgefunden worden. Dagegen zeigen sie sich, freilich aus weit einfacher zu erklärenden Gründen, bei den Gletschern (vgl. A. Heims Handbuch der Gletscherkunde), häufig auch bei der Bewegung von Erdmassen.

Da wo im Inneren des Gletschers Zugspannungen entstehen, wird die Zugfestigkeit des Eises bald überschritten; es entsteht ein Riss, dessen Fläche auf der Richtung des grössten Zuges senkrecht steht; die Gletscherspalten folgen somit der Richtung des grössten Druckes. Am deutlichsten treten in dieser Hinsicht die Querspalten oberhalb der Gletscherstürze und die Randspalten auf; letztere bilden mit der seitlichen Grenze des Gletschers Winkel von annähernd 45 Grad, wie es sein muss, wenn bloss transversale Oberflächenkräfte thätig sind. Andrerseits bilden sich im Eise unter dem Einflusse grösserer innerer Druckspannungen die sogenannten blauen Blätter aus; diese stehen auf der Richtung des grössten Druckes normal, laufen somit in der Richtung der Zugkurven.

Selbstverständlich liegen die Verhältnisse an den Gletschern nicht so klar, weil diese sich in beständiger Bewegung befinden und die Richtungen der entstandenen Spalten und blauen Bänder sich allmälig ändern. Wollte man den Zusammenhang dieser Er-

scheinungen mit den inneren Kräften genauer studiren, so müsste man sie stets bei ihrem ersten Entstehen ins Auge fassen.

Die Richtung der Spalten und der blauen Schichten auf mathematischem Wege aus den Kräften abzuleiten, dürfte zur Zeit schwerlich gelingen; denn abgesehen davon, dass die Construction der Hauptaxen des Spannungsellipsoides (vgl. Nr. 9) eine höchst umständliche Arbeit ist, wissen wir auch über die Grösse der Reibungskräfte, welche bei der Gletscherbewegung sowohl am Grunde als auch im Innern des Eises auftreten, viel zu wenig, um mit einiger Hoffnung auf Gelingen die Aufgabe in Angriff nehmen zu können.

Zu einigen Bemerkungen über das Auftreten der Spannungskurven in bewegten Erdmassen wird der dritte Teil dieses Werkes Gelegenheit bieten.

29. Spannungen, welche die Elasticitätsgrenze überschreiten.

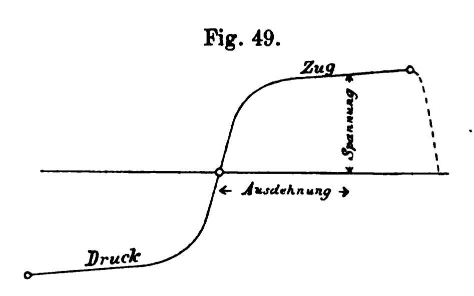
(Tafel 2.)

In allen bisherigen Betrachtungen über das Gleichgewicht zwischen äusseren und inneren Kräften ist vorausgesetzt worden, dass die elastischen Formänderungen der Körperelemente den auf sie einwirkenden Spannungen proportional seien. Wie schon in der Nummer 1 bemerkt worden ist, behält dieses Gesetz nur bis zu einer gewissen Grenze seine Gültigkeit; steigt die Spannung über diese Grenze hinaus, so wächst die Formänderung rascher als nach dem Gesetz der Proportionalität zu erwarten wäre.

Schon seit längerer Zeit ist es in der Bautechnik üblich geworden, die Formänderung der Materialien bei Beanspruchungen, welche über die Elasticitätsgrenze hinausgehen, durch Zeichnung eines Diagrammes darzustellen, dessen Abscissen den elastischen Ausdehnungen und dessen Ordinaten den spannenden Kräften entsprechen. So lange beide Werte einander proportional bleiben, steigt die Kurve (siehe Figur 49) geradlinig in die Höhe; bei der Elasticitätsgrenze angekommen biegt sie sich ab, wird allmälig flacher, verläuft gewöhnlich noch eine Strecke weit beinahe horizontal und bricht dann plötzlich da ab, wo die Beanspruchung die Festigkeit überwindet und der Bruch des Versuchsstabes eintritt. Streng genommen sollte die Kurve ohne Unterbrechung wieder fallen

und zur Abscisse zurückkehren; doch kann der absteigende Zweig bei den gewöhnlichen Methoden des Experimentirens nicht immer bestimmt werden; auch ist er bei den meisten in Frage kommenden Materialien sehr steil und fällt daher nicht stark in Betracht.

Fig. 49.



Bei der Schwierigkeit, mit welcher die Messung der elastischen Verkürzung bei Druckversuchen verknüpft ist, hat man sich bis dahin fast nur mit dem Diagramm für Zugbeanspruchungen befasst; es lässt sich jedoch annehmen, dass das Diagramm für Druck, wie die Figur 49 es zeigt, annähernd gleich dem ersteren verläuft.

Unter dieser Voraussetzung soll nun an einem Schienenprofil gezeigt werden, wie in einem gegebenen Falle der Zusammenhang zwischen den inneren Spannungen und dem Momente der äusseren Kraft graphisch bestimmt werden kann. Da es unmöglich ist, die Spannungen direct anzugeben, die einem gegebenen Momente entsprechen, so muss der umgekehrte Weg eingeschlagen werden; mit anderen Worten, es muss das Querschnittsprofil mit dem Diagramm in eine bestimmte Beziehung gebracht und hierauf das Moment ermittelt werden, das der betreffenden Spannungsverteilung entspricht. Wir setzen dabei wie in der Nummer 13 voraus, dass ein Querschnitt, der vor der Biegung eben ist, es auch nach derselben bleibt, mit anderen Worten, dass die Verlängerungen und Verkürzungen der einzelnen Fasern deren Entfernung von einer neutralen Axe proportional sind.

Die betreffenden Constructionen sind auf der Tafel 2 in den Figuren 6—11 ausgeführt worden. Das Diagramm ist dort (Fig. 11) um 90^{0} gedreht worden, so dass die Spannungen durch die Abscissen, die elastischen Verlängerungen und Verkürzungen durch die Ordinaten dargestellt sind. Erstere sind, auf den Quadratcentimeter bezogen, im Massstabe $1\,t = 1\,cm$ aufgetragen; letztere entsprechen einem Stabe von der Länge $l = 30\,m$. Sämtliche Längen, sowie das Schienenprofil sind jedoch in halber natürlicher Grösse aufgetragen.

Der Querschnitt ist zunächst so gelegt worden, dass sein Schwerpunkt mit dem Nullpunkt des Diagramms zusammenfällt.

Sodann wurde er in üblicher Weise in 20 horizontale Streifen geteilt; die Inhalte dieser letzteren wurden auf die Basis $a = 2{,}6\ cm$ reducirt und die Resultate der Verwandlung (jeweilen der vierte Teil der Streifenlänge) als verticales Kräftepolygon (Fig. 10) mit dem Pol O_1 aufgetragen. Die Poldistanz b wurde gleich $7{,}69\ cm$ genommen, so dass das Produkt $a\,b$ sich gleich $20\ cm^2$ ergab. Durch die Schwerpunkte der Lamellen wurden hierauf horizontale Linien gezogen und deren Schnittpunkte mit dem Diagramm als Angriffspunkte für die Kräfte Δr der Figur 10 gewählt. Das entsprechende Seilpolygon (Figur 11 oben) enthält somit in seinen verticalen Abschnitten die Produkte $\Delta r \,.\, \sigma$, und zwar ist, wenn diese Abschnitte mit Δs bezeichnet werden, $\Delta r \,.\, \sigma = b \,.\, \Delta s$ und hiernach, da $\Delta F = a \,.\, \Delta r$ ist, $\Delta F \,.\, \sigma = a \,.\, b \,.\, \Delta s$.

Wirkt auf den Querschnitt, wie vorausgesetzt worden, nur ein Biegungsmoment und keine Normalkraft, so muss die Summe aller Δs gleich null sein; ist letzteres nicht der Fall, so hat man das Diagramm (oder auch das Profil) durch Probiren so weit in verticaler Richtung zu verschieben, bis diese Bedingung erfüllt wird. In unserer Construction war jedoch diese Aenderung unnötig.

Nun wurden die Δs wieder als Kräfte, die in den Schwerpunkten der Lamellen in horizontaler Richtung wirken, angesehen und mit Hülfe des Poles O_2 zusammengesetzt. Die Seiten des sich ergebenden Seilpolygons (Figur 9) stehen auf den Strahlen aus O_2 senkrecht und schneiden auf der x-Axe die Werte $\Delta \mu = \frac{\Delta s \,.\, y}{c}$ ab, worin y die Entfernung einer Lamelle von der x-Axe bedeutet. Nennt man den Gesamtabschnitt μ, so ist das statische Moment der inneren Kräfte

$$M = \Sigma \Delta F \,.\, \sigma \,.\, y = \Sigma a \,.\, b \,.\, \Delta s \,.\, y = a \,.\, b \,.\, c \,.\, \mu .$$

Dabei muss μ im Massstab der σ abgegriffen werden. Da $a\,b = 20\ cm^2$, $c = 8\ cm$, $\mu = 3{,}28$, so ergibt sich für den auf der Tafel dargestellten Fall

$$M = 525\ cmt.$$

Da das Widerstandsmoment des Schienenprofils (vergleiche die Figuren 1—4 der Tafel 2) $154\ cm^3$ beträgt, so würde die Spannung, wenn sie proportional y zunähme, in der äussersten Faser den Wert $\frac{525}{154} = 3{,}41\ t$ erreichen, während sie sich jetzt nur gleich $3{,}0\ t$ ergibt. (Das Moment von 525 cmt entspricht dem

grössten Biegungsmomente, welches sich einstellt, wenn man die Schiene auf 1 *m* frei legt und in der Mitte mit 21 *t* belastet.)

Will man die Beanspruchung des Querschnittes für verschiedene Werte von M kennen, so hat man das Diagramm für verschiedene Stablängen l zu zeichnen und die Construction zu wiederholen; das Diagramm wird hierbei einfach vertical verzerrt. Genauere Resultate erzielt man jedoch, wenn man das Diagramm unverändert lässt und dagegen das Querschnittsprofil vertical verzerrt, das heisst die Abstände der Horizontalen durch die Lamellen-Schwerpunkte von der x-Axe in irgend einem festen Verhältnis vergrössert oder verkleinert und damit auf dem Diagramm die neuen Angriffspunkte der Δr bestimmt; die Δs lässt man jedoch stets in denselben Horizontalen wirken. Man erhält auf diesem Wege eine Reihe von zusammengehörenden μ und σ, wobei stets das Produkt $a\,b\,c\,\mu$ das Biegungsmoment darstellt, und kann diese beiden Werte als Abscissen und Ordinaten auftragen.

Es ist dies für drei weitere Fälle geschehen; doch sind die betreffenden Constructionslinien wieder ausgelöscht und bloss die μ und σ in der Figur 7 zu einer Kurve zusammengetragen worden. Diese Kurve steigt, so lange nur Spannungen innerhalb der Elasticitätsgrenze in Betracht kommen, geradlinig an; dann biegt sie sich leicht ab. Setzt man voraus, dass eine Spannung von 3,6 *t* den Bruch des Eisens herbeiführe, so entspräche diesem Werte ein Biegungsmoment von $ab \,.\, c \,.\, \mu = 20 \,.\, 8 \,.\, 4{,}22 = 675$ *cmt*. Die Spannung, welche sich ergibt, wenn man die gewöhnliche Biegungsformel anwendet, beträgt dagegen $\sigma = \frac{M}{a\,b\,t} = \frac{675}{154} = 4{,}37\ t$, also $21\frac{1}{2}\,\%$ mehr. Man erkennt hieraus, dass die aus Biegungsversuchen ermittelten Festigkeitscoefficienten mit den aus Zugversuchen abgeleiteten nicht wohl übereinstimmen können. —

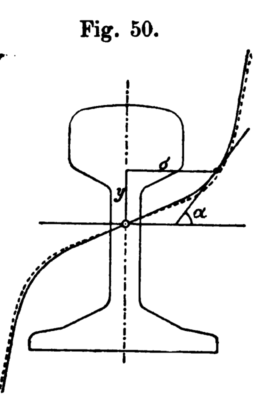
In unserer Construction sind die Δr zuerst mit den σ und erst dann mit den y multiplicirt worden. Handelt es sich bloss um die Bestimmung der Momente für verschiedene Spannungen in der äussersten Kante, so ist es praktischer, die Δr zuerst mit den y und dann mit den σ zu multipliciren, weil in diesem Falle das erste Seilpolygon nur einmal zu zeichnen ist. Der von uns eingeschlagene Weg wird jedoch notwendig, wenn man, wie es von vornherein unsere Absicht war, auch die im Querschnitt herrschenden Transversalkräfte bestimmen will.

Wir nehmen an, der Querschnitt werde von einer in der y-Axe liegenden Kraft Q beansprucht, so dass das Biegungsmoment, wenn man von diesem Querschnitt zu einem um $\varDelta x$ entfernten übergeht, um

$$\varDelta M = Q \,.\, \varDelta x$$

zunimmt. Dem entsprechend werden sich auch die Normalspannungen von einem Schnitt zum andern vergrössern; die Zunahme von σ betrage für ein beliebiges Flächenelement, dessen Ordinate gleich y ist, $\varDelta \sigma$. Wie bereits oben bemerkt wurde, entspricht einer Aenderung des Momentes eine verticale Verzerrung des Diagramms. Rückt man nun (Fig. 50) jeden Punkt dieser Kurve um eine kleine Strecke, die der Ordinate desselben proportional ist, gegen die horizontale Axe, und bezeichnet man diese Strecke mit $\delta \,.\, y$, wobei δ ein sehr kleiner, aber constanter Factor ist, so wird hierbei jedes σ um die Strecke

Fig. 50.



$$\varDelta \sigma = \delta \,.\, y \,.\, ctg\, \alpha$$

vergrössert. Wir erhalten somit die Gleichung

$$\varDelta M = \Sigma \varDelta F \,.\, \varDelta \sigma \,.\, y = \delta\, \Sigma \varDelta F \,.\, y^2 \,.\, ctg\, \alpha = \delta\, a\, \Sigma \varDelta r \,.\, y^2 \,.\, ctg\, \alpha.$$

Legt man nun (Taf. 2_{11}) in den frühern Angriffspunkten der $\varDelta r$ Tangenten an das Diagramm und lässt die $\varDelta r$ in denjenigen Punkten, in welchen diese Tangenten die x-Axe schneiden, wiederum als verticale Kräfte wirken, so erhält man das untere Seilpolygon der Figur 11, dessen Abschnitte auf der y-Axe

$$\varDelta s' = \frac{\varDelta r\, (\sigma - y \,.\, ctg\, \alpha)}{b} = \varDelta s - \frac{\varDelta r \,.\, y \,.\, ctg\, \alpha}{b}$$

sind. Construirt man dann noch mit Hülfe des Poles O_2' ein viertes Polygon (Figur 8), in welchem die $\varDelta s'$ als horizontale Kräfte wirken, so erhält man als Abschnitt zwischen der ersten und letzten Seite die Strecke

$$\mu' = \Sigma \frac{\varDelta s' \,.\, y}{c} = \Sigma \frac{\varDelta s \,.\, y}{c} - \Sigma \frac{\varDelta r \,.\, y^2 \,.\, ctg\, \alpha}{b \,.\, c}$$

$$= \mu - \frac{1}{b \,.\, c} \Sigma \varDelta r \,.\, y^2 \,.\, ctg\, \alpha.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem oben für $\varDelta M$ aufgestellten, so bekommt man

$$\varDelta M = Q \,.\, \varDelta x = \delta \,.\, a \,.\, b \,.\, c\,(\mu - \mu').$$

Legt man nun durch die Balkenscheibe von der Dicke $\varDelta x$ einen horizontalen Schnitt, beispielsweise an der Grenze zwischen der dritten und vierten Lamelle, so wirkt in dieser Schnittfläche eine horizontale Schubkraft T, die gleich der Differenz der Normalspannungen ist, welche oberhalb der Schnittlinie (also in den Lamellen 1 bis 3) auf beiden Seiten der Scheibe angreifen; es folgt daher

$$T = \sum_1^3 \varDelta F \,.\, \varDelta \sigma = \delta \,.\, a \sum_1^3 \varDelta r \,.\, y \,.\, ctg\, \alpha$$

oder, wenn man den oben für $\varDelta s'$ gefundenen Ausdruck berücksichtigt,

$$T = \delta \,.\, a \,.\, b \sum_1^3 (\varDelta s - \varDelta s').$$

Setzt man endlich noch, indem man die Schubkraft T über die genannte Schnittfläche gleichförmig verteilt und die Breite des Profils an der betreffenden Stelle wie früher mit z bezeichnet,

$$T = \tau \,.\, z \,.\, \varDelta x,$$

so folgt $\tau = \dfrac{T}{z \,.\, \varDelta x}$ und unter Benützung obiger Beziehung für $\varDelta M$

$$\tau = \frac{Q \sum_1^3 (\varDelta s - \varDelta s')}{z \,.\, c\,(\mu - \mu')}.$$

Dieser Ausdruck für die im horizontalen Schnitt wirkende Schubspannung gilt bekanntlich auch zugleich für die im Querschnitt in verticaler Richtung herrschende Spannung.

Der Ausdruck für τ lässt sich nun leicht construiren. Da die μ, wie die σ, Kräfte pro Flächeneinheit darstellen, so ist $\dfrac{Q}{c\,(\mu - \mu')}$ eine Länge; sie ergibt sich, wenn man $Q = 10{,}5\ t$ (der Hälfte von 21 t) annimmt, $m = \dfrac{10{,}5}{8 \,.\, 1{,}65} = 0{,}795\ cm$. Es ist daher

$$\tau = \frac{0{,}795}{z} \sum_1^3 (\varDelta s - \varDelta s').$$

Subtrahirt man die $\Sigma \varDelta s$ und $\Sigma \varDelta s'$ für jede Lamellengrenze mit dem Zirkel voneinander und trägt (Figur 6) die Differenzen von der verticalen Axe aus nach rechts auf, so ergeben deren End-

punkte die Kurve der $\frac{\tau z}{m}$. Bildet man sodann für jede Lamellengrenze ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten m und z und zieht zu den Hypotenusen dieser Dreiecke Parallelen durch obige Endpunkte, so werden auf der Verticalen die τ selbst abgeschnitten. Durch Drehung derselben um 90° gelangt man zu der Kurve der τ.

Analog den in der Figur 1 ausgeführten Constructionen wurden schliesslich noch die σ von der Verticalen aus aufgetragen und aus deren Halbirungspunkten mit den Radien $\sqrt{1/4\,\sigma^2 + \tau^2}$ Halbkreise gezogen; daraus ergaben sich die Kurven der grössten Zug- und Druckspannungen (σ_{max} und σ_{min}) für schiefe Schnitte.

Des Vergleiches wegen haben wir auch noch die Maximalspannungen bestimmt, welche sich ergeben, wenn man für das Biegungsmoment von 525 *cmt* die üblichen Festigkeitsformeln anwendet, das heisst voraussetzt, dass die Spannungen noch innerhalb der Elasticitätsgrenze liegen. Die betreffenden Kurven sind in der Figur 6 gestricht ausgezogen und weichen von den ersteren stellenweise nicht unwesentlich ab. —

Wir sind bei der vorstehenden Construction von der Annahme ausgegangen, dass die Ausdehnung des Materials der Entfernung von einer neutralen Axe proportional sei. Ob diese Annahme bei Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze noch zuverlässige Resultate liefert, kann nur durch das Experiment entschieden werden und mag einstweilen bezweifelt werden; doch steht uns, wenn man die vorliegende Aufgabe überhaupt in Angriff nehmen will, kein anderer Weg zu ihrer Behandlung offen. Wird die obgenannte Voraussetzung als zulässig angesehen, so gestattet das graphische Verfahren, wie diese Nummer zeigt, eine verhältnismässig leichte und einfache Beantwortung der einschlägigen Fragen und dürfte der Rechnung bei weitem vorzuziehen sein. Das hier erläuterte Verfahren gewinnt aber namentlich dann an Wert, wenn es sich um Fragen der Biegungsfestigkeit für ein Material (wie zum Beispiel Gusseisen) handelt, dessen Spannungsdiagramm auch unterhalb der Elasticitätsgrenze, das heisst in seiner ganzen Ausdehnung krummlinig verläuft.

Viertes Kapitel.

Elastische Formänderungen.

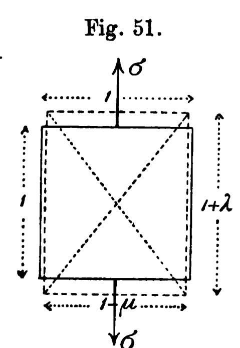
30. Die Elasticitätscoefficienten.

Schon in der Nummer 1 ist erklärt worden, dass wir unter Elasticität fester Körper deren Eigenschaft verstehen, unter dem Einflusse äusserer Kräfte Formänderungen anzunehmen, welche nach Entfernung der Kräfte ganz oder teilweise wieder verschwinden. So lange hierbei die inneren Spannungen eine gewisse Grenze, die Elasticitätsgrenze, nicht überschreiten, sind die Formänderungen den wirkenden Kräften nahezu proportional. Der Zweck dieser Nummer besteht nun darin, das Verhältnis der inneren Kräfte zu den Aenderungen der Form eingehender zu besprechen und Methoden zu entwickeln, welche uns gestatten, die Formänderungen ganzer Balken zeichnerisch zu bestimmen.

Wie sich bei den inneren Kräften normale und transversale Spannungen unterscheiden lassen, so sprechen wir auch von Normal- und Transversal-Elasticität.

Unter dem Einfluss normaler Kräfte verwandelt sich ein ursprünglich würfelförmiges Element (Fig. 51) in ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Höhe grösser und dessen Breite kleiner ist als die Seite des Würfels. Transversale Spannungen dagegen führen den Würfel in ein schiefwinkliges Parallelepiped über, dessen Seiten (bei Vernachlässigung von unendlich kleinen Grössen zweiten Grades) denjenigen des ursprünglichen Würfels gleich sind (Fig. 52).

Fig. 51.



Das Verhältnis der Spannung zur Formänderung wird nun durch Coefficienten angegeben, welche wie die Spannung selbst in Kräften pro Flächeneinheit gemessen werden. Macht man die Seite des Würfels (Fig. 51)

gleich 1 und nennt die Strecke, um welche die verticale Ausdehnung zunimmt, λ, so ist diese Strecke der Spannung σ proportional und das Verhältnis beider, nämlich den Quotienten $\frac{\sigma}{\lambda}$ nennt man den Coefficienten für Normalelasticität oder kurz den *Elasticitätsmodul* (E). Ebenso wird bei einer Beanspruchung auf Schub (Fig. 52) die Verschiebung ν der einen Grundfläche gegenüber der anderen der Spannung τ proportional sein; das Verhältnis $\frac{\tau}{\nu}$ wird Coefficient der Transversalelasticität oder kurz *Gleitmodul* (G) genannt. In Worten ausgedrückt: *Der Elasticitätsmodul (beziehungsweise Gleitmodul) ist gleich der spezifischen Spannung dividirt durch die spezifische Verlängerung (beziehungsweise Verschiebung).* Auch kann man sagen: *Die Verlängerung (beziehungsweise Verschiebung) verhält sich zur ganzen Länge wie die spezifische Spannung zum Elasticitätsmodul (beziehungsweise Gleitmodul).*

Fig. 52.

Die Grösse E kann verhältnismässig leicht durch Versuche bestimmt werden; sie ergibt sich für die üblichen Walzeisen- und Stahlsorten als ziemlich constant; bei den übrigen Baumaterialien dagegen ist sie je nach deren Natur schwankend. Die experimentelle Bestimmung des Gleitmoduls G jedoch bietet Schwierigkeiten, so dass man es bis jetzt vorgezogen hat, diese Grösse auf Umwegen oder auf Grund theoretischer Erwägungen zu ermitteln. Professor Clebsch schlägt in seiner Theorie der Elasticität hierzu folgenden Weg ein.

Bezeichnet man (Fig. 51) die Abnahme der Breite, welche der Würfel unter dem Einfluss der Normalkraft σ erfahren hat, mit μ, so beträgt der Rauminhalt des Elementes nach der Formänderung $(1 + \lambda)(1 - \mu)^2$ oder, unter Vernachlässigung von Produkten höherer Ordnung, $1 + \lambda - 2\mu$. Da nun das Volumen des Elementes jedenfalls nicht kleiner, sondern eher grösser geworden ist, so muss $\lambda - 2\mu$ positiv oder λ grösser als 2μ sein. Der Wert μ liegt also zwischen 0 und $^1/_2\lambda$.

Den Vorgang bei der Formänderung des Würfels kann man sich sodann folgendermassen vorstellen. Teilt man den Würfel

durch Ebenen parallel zu den beiden Diagonalebenen in kleine Stäbchen von quadratischem Querschnitt, so stehen die Seitenflächen dieser Stäbchen unter dem Einfluss von Spannungen σa, wenn die Diagonale des Quadrates mit a bezeichnet wird (Fig. 53). Zerlegt man diese Spannung normal und parallel zur Seitenfläche, so ist die auf eine Quadratseite treffende transversale Spannung gleich $\sqrt{1/_8 \sigma a}$ oder, auf die Flächeneinheit bezogen, $\tau = 1/_2 \sigma$. Unter der Wirkung dieser Spannung geht das Quadrat in ein Parallelogramm über; aus den rechten Winkeln werden schiefe Winkel, und zwar ändert sich der rechte Winkel (wie in der Figur 52) der Spannung τ entsprechend um

Fig. 53.

$\nu = \frac{\tau}{G} = \frac{\sigma}{2G}$; dabei dreht sich die einzelne Quadratseite um den Winkel $1/_2 \nu$. Setzt man nun aus den deformirten Quadraten wieder die Gesamtfigur zusammen, so erhält man das gestrichte Rechteck der Figur 51, dessen Diagonalen sich ebenfalls um $1/_2 \nu$ gedreht haben. Nun ist aber in dieser Figur

$$tang\,(45 + 1/_2 \nu) = \frac{1 + 1/_2 \nu}{1 - 1/_2 \nu} = \frac{1 + \lambda}{1 - \mu}$$

und hiernach, wenn man Produkte der unendlich kleinen Grössen streicht,

$$\nu = \lambda + \mu.$$

Führt man den obigen Wert von ν ein, so ergibt sich

$$G = \frac{\sigma}{2(\lambda + \mu)},$$

oder, da σ auch gleich λE ist

$$G = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} E.$$

Es ist oben gezeigt worden, dass μ zwischen 0 und $1/_2 \lambda$ liegt; daraus folgt, dass G zwischen $1/_2 E$ und $1/_3 E$ liegen muss.

Das Verhältnis der Längsausdehnung λ zur Quercontraction μ wird in den Lehrbüchern über Elasticitätstheorie vielfach mit ε bezeichnet; alsdann wird

$$G = \frac{\varepsilon}{2(1 + \varepsilon)} E.$$

ε ist für verschiedene feste Körper experimentell bestimmt worden und hat sich dabei meist als zwischen 3 und 4 liegend heraus-

gestellt. Hiernach würde für die uns hauptsächlich interessirenden Körper G zwischen $^3/_8\,E$ und $^2/_5\,E$ liegen. Wenn keine bestimmteren Anhaltspunkte vorliegen, so werden wir den letzteren Wert benützen.

Was die Zahlenwerte von E und G betrifft, so muss noch bemerkt werden, dass diese Module nur für isotrope Körper als constant angenommen werden dürfen, dass sie sich dagegen für verschiedene Schnittrichtungen ändern, sobald der Körper faserige oder schieferige Structur besitzt. Glücklicherweise brauchen wir die beiden Werte in unseren späteren Anwendungen in der Regel nur für eine bestimmte, hinsichtlich der Structur des Materials sich gleich bleibende Richtung, so dass diese Unterschiede für uns wenig praktischen Wert haben. Vielfach dürfen wir auch von der Gleit-Elasticität absehen (das heisst $G = \infty$ annehmen) und uns auf die aus der Normal-Elasticität entspringenden Formänderungen beschränken.

31. Formänderung eines Balkenelementes unter dem Einfluss einer Normalkraft P.

Bei den meisten Aufgaben, die sich in der Statik der Bauconstructionen darbieten, genügt es, sich sowohl bei der Bestimmung der inneren Spannungen als auch bei der Untersuchung der Elasticitätsverhältnisse auf balkenförmige Körper, das heisst auf solche Körper zu beschränken, die eine ausgesprochene Längsausdehnung besitzen und deren Querschnitte sich nicht wesentlich ändern.

Wir betrachten nun wie in der Nummer 12 ein Balkenelement, das durch zwei benachbarte Querschnitte begrenzt wird, und fragen uns, in welcher Weise sich dessen Gestalt unter der Wirkung äusserer Kräfte verändert. Wie in der genannten Nummer gezeigt worden ist, können die äusseren Kräfte stets in zwei Kräfte P und Q übergeführt werden, von denen die eine zum Querschnitt normal steht, während die andere in der Ebene des Querschnittes liegt. (Siehe Fig. 17, S. 49.)

Laut unseren an jener Stelle gemachten Annahmen bewirkt nun die Kraft P, dass sich der eine Querschnitt gegenüber dem anderen um eine in der Schnittebene liegende Axe dreht, welche hinsichtlich der Centralellipse zum Angriffspunkte A der Kraft antipolar liegt. Ferner fand sich (S. 54) die Spannung im Schwer-

punkte S des Querschnittes $\sigma_s = \frac{P}{F}$. Nennt man nun die Länge des Elementes $\varDelta s$, so verlängert, beziehungsweise verkürzt sich somit die Schwerpunktsfaser nach dem Satz auf der Seite 142 um die Strecke $\frac{P \,.\, \varDelta s}{F \,.\, E}$. Bezeichnet man ferner, wie es in der Figur 18 (Seite 52) geschehen ist, den in der Richtung AS gemessenen Abstand der neutralen Axe mit n, so ist der Winkel, um welchen sich die Linie AS dreht, gleich der durch n dividirten Verlängerung der Schwerpunktsfaser, oder

$$\varDelta \delta = \frac{P \,.\, \varDelta s}{F \,.\, E \,.\, n};$$

da aber $p \,.\, n = i^2$ ist (vgl. S. 55), so folgt

$$\varDelta \delta = \frac{P \,.\, p \,.\, \varDelta s}{F \,.\, i^2 \,.\, E} = \frac{M \,.\, \varDelta s}{J \,.\, E}.$$

Um den Winkel zu finden, um welchen sich der ganze Querschnitt dreht, hat man $\varDelta \delta$ durch $\sin \omega$ zu dividiren, wobei ω den Winkel zwischen AS und der neutralen Axe bedeutet; der Drehungswinkel des Querschnittes wird daher erhalten, wenn man im obigen Ausdruck für $\varDelta \delta$ die Längen p und i nicht parallel zu AS, sondern senkrecht zur neutralen Axe misst.

Obige Formel gilt für beliebige Angriffspunkte der Kraft P. Fällt letzterer speziell mit dem Schwerpunkte zusammen, so rückt die neutrale Axe ins Unendliche und der Winkel $\varDelta \delta$ wird (da in diesem Falle das Moment M verschwindet) gleich null; das heisst die Drehung des Querschnittes geht in eine Parallelverschiebung über. Die Grösse dieser Verschiebung findet sich dann einfach gleich

$$\frac{\sigma_s}{E} \cdot \varDelta s = \frac{P \,.\, \varDelta s}{F \,.\, E}.$$

Bezeichnet man den Krümmungshalbmesser der elastischen Linie (s. Nr. 35) mit ϱ, so ist $\varrho \,.\, \varDelta \delta = \varDelta s$, somit

$$M \,.\, \varrho = J \,.\, E,$$

das heisst, das Produkt aus dem Krümmungshalbmesser und dem Biegungsmomente ist dem Trägheitsmoment des Querschnittes proportional; bei constantem Querschnitt ist der Krümmungsradius dem Biegungsmomente umgekehrt proportional.

32. Formänderung unter dem Einfluss einer Querkraft Q.

In ähnlicher Weise könnte man nun auch im Anschluss an die Betrachtungen der Nummer 14 die Formänderung bestimmen, welche ein Balkenelement durch eine Transversalkraft Q erfährt.

Ausgehend von der Annahme, dass die Scherkraft eine Drehung um eine zum Querschnitt normale Axe bewirke, sind wir dort zu dem Ergebnisse gelangt, dass der Drehpunkt zur Kraft Q antipolar hinsichtlich des Kreises liege, den ein um die Centralellipse gleitender rechter Winkel beschreibt und dass die Scherspannung im Schwerpunkte $\tau_s = \frac{Q}{F}$ sei. Besitzt nun das Balkenelement wieder die Länge $\varDelta s$, so wird die Schwerpunktsfaser eine Querverschiebung gleich $\frac{Q \,.\, \varDelta s}{F \,.\, G}$ erfahren. Nun ist aber der Drehpunkt N (Fig. 19 auf der Seite 59) um die Strecke $n = \frac{i_p^2}{q}$ vom Schwerpunkt entfernt, wenn i_p den Radius des obigen Kreises und q den Hebelarm von Q bedeutet. Daraus ergibt sich der Drehungswinkel des Querschnittes

$$\varDelta \delta_t = \frac{Q \,.\, \varDelta s}{F \,.\, G} : n = \frac{Q \,.\, q \,.\, \varDelta s}{F \,.\, i_p^2 \,.\, G} = \frac{M_t \,.\, \varDelta s}{J_p \,.\, G},$$

ein Ausdruck, welcher von demjenigen für die Normalkraft nur darin abweicht, dass statt des Biegungsmomentes das Torsionsmoment, statt des gewöhnlichen Trägheitsmomentes das polare und statt des Elasticitätsmoduls der Gleitmodul auftritt.

Es ist indessen schon in der Nummer 14 bemerkt worden, dass die Annahme, der Querschnitt drehe sich unter dem Einfluss von Q, ohne seine Gestalt zu ändern, im Allgemeinen nicht zulässig ist; nur bei kreisförmigem Querschnittsprofil gibt obige Formel brauchbare Resultate, ganz genaue sogar nur dann, wenn die Kraft Q zugleich unendlich klein und unendlich fern (ein Kräftepaar) ist.

Gleichwie in den Nummern 15 und 16 verfährt man bei der vorstehenden Untersuchung besser, wenn man den drehenden Einfluss der Kraft Q von dem schiebenden Einflusse trennt, mit andern Worten die Querkraft Q in ein Kräftepaar M_t und eine durch den

Schwerpunkt gehende Kraft überführt und die Wirkungen beider Teile unabhängig voneinander ableitet.

Den Drehungswinkel zu bestimmen, welcher sich unter dem Einfluss eines Torsionsmomentes einstellt, ist bis jetzt nur bei einigen einfachen Querschnittsfiguren (Kreis, Ellipse, Rechteck etc.) gelungen; für complicirtere Figuren werden die diesbezüglichen, auf den elastischen Formänderungen unendlich kleiner Körperelemente beruhenden Rechnungen sehr schwierig oder unmöglich. Da diese Aufgaben bis jetzt noch keine graphische Lösung gefunden haben, und da Torsionswirkungen für die Baustatik keine sehr grosse Bedeutung haben, so treten wir auf dieses Thema nicht näher ein, sondern beschränken uns darauf, die Wirkung einer durch den Schwerpunkt gehenden Scherkraft zu untersuchen.

Würde sich die Kraft Q gleichförmig über den Querschnitt verteilen, so ergäbe sich als elastische Formänderung einfach eine parallel zur Kraft gerichtete Verschiebung des Querschnitts um die Strecke $\frac{Q \cdot \varDelta s}{F \cdot G}$. Da jedoch, wie in der Nummer 15 gezeigt worden ist, diese Bedingung nicht zutrifft, so müssen wir die Verhältnisse sorgfältiger prüfen.

Da die im Querschnitt auftretenden Scherspannungen τ verschieden sind, so erfahren die einzelnen Teilchen des Balkenelementes auch verschiedenartige Formänderungen. Wenn man trotzdem von einer Bewegung oder Verschiebung des ganzen Querschnittes spricht, so kann man darunter nur eine durchschnittliche oder mittlere Verschiebung verstehen.

In der Regel bestimmt man nun diese letztere dadurch, dass man die mechanische Arbeit, welche die Kraft Q bei der Bewegung verrichtet, (oder, wenn man will, ihr virtuelles Moment) der durch die inneren Spannungen geleisteten Arbeit gleich setzt.

Bezeichnet man die gesuchte Verschiebung mit $\varDelta q$, den Inhalt eines Flächenelementes im Querschnitte mit $\varDelta F$ und die zu Q parallele Componente der Transversalspannung mit τ, so erfährt jedes Flächenelement eine Querverschiebung gleich $\frac{\tau \cdot \varDelta s}{G}$; die entsprechende Formänderungsarbeit dieses Elementes wird daher (unter Weglassung des Factors $1/2$) gleich $\tau \cdot \varDelta F \cdot \frac{\tau \cdot \varDelta s}{G} = \frac{\tau^2 \cdot \varDelta F \cdot \varDelta s}{G}$ und es folgt nach obigem Gesetz die Gleichung

$$Q \,.\, \varDelta q = \Sigma \frac{\tau^2 \,.\, \varDelta F \,.\, \varDelta s}{G}.$$

oder

$$\varDelta q = \frac{\varDelta s}{Q \,.\, G} \Sigma \tau^2 \,.\, \varDelta F.$$

Nimmt man gleichförmige Verteilung der Kraft Q an, so wird τ constant und die Verschiebung gleich $\frac{\varDelta s}{Q \,.\, G} \cdot \tau^2 \,.\, F$ oder, da in diesem Falle $Q = \tau \,.\, F$ ist, gleich

$$\frac{Q \,.\, \varDelta s}{F \,.\, G}.$$

Das Verhältnis beider Werte wollen wir in der Folge mit $\varkappa$ bezeichnen; dann ergibt sich

$$\varkappa = \frac{F}{Q^2} \Sigma \tau^2 \,.\, \varDelta F$$

und

$$\varDelta q = \varkappa \,.\, \frac{Q \,.\, \varDelta s}{F \,.\, G}.$$

Der Coefficient $\varkappa$ für die Querverschiebung ist, wie man leicht erkennt, nur von der Querschnittsform abhängig und lässt sich für einfachere Figuren leicht berechnen. Er ergibt sich stets grösser als Eins und zwar beispielsweise für das Rechteck gleich $^6/_5$, für Kreis und Ellipse gleich $^{10}/_9$. Für complicirtere Figuren kann man zu seiner Bestimmung folgenden graphischen Weg einschlagen.

Man teilt die Querschnittsfigur in horizontale Streifen ein, bestimmt mittelst zweier Seilpolygone das Trägheitsmoment und hierauf unter Annahme einer beliebigen Kraft Q die Kurven der $\tau b z$ und $\tau a b$. (Vgl. Tafel 2, Fig. 1—4.) Hierauf verwandelt man die Flächenstreifen der $\tau b z$ auf eine Basis a', fügt die erhaltenen Strecken als verticale Kräfte aneinander und zeichnet mit der Polweite H ein Seilpolygon, indem man die Kräfte in den entsprechenden Punkten der Kurve $\tau a b$ angreifen lässt. Dann schneiden die Seilpolygonseiten auf der verticalen Axe die Werte $\frac{\tau b z \,.\, \varDelta y}{a'} \cdot \frac{\tau a b}{H} = \frac{a b^2}{a' H} \cdot \tau^2 \cdot \varDelta F$ ab. Die Summe sämtlicher Abschnitte, im Massstab der Kräfte abgegriffen, ist somit

$$K = \frac{a b^2}{a' H} \Sigma \tau^2 \,.\, \varDelta F,$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf obige Gleichung der gesuchte Coefficient

$$\varkappa = \frac{a' F H K}{a b^2 Q^2}.$$

Macht man H gleich der Summe sämtlicher Kräfte, das heisst gleich $\Sigma \frac{\tau b z . \Delta y}{a'} = \frac{b Q}{a'}$, so wird einfacher

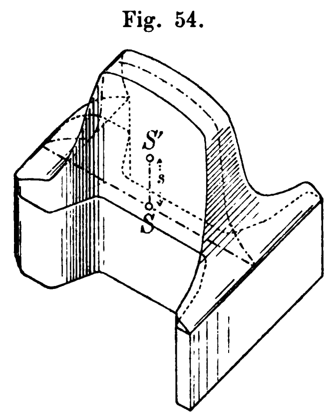
$$\varkappa = \frac{F K}{a b Q}.$$

Legt man überdies der Construction der Kurve $\tau b z$ nicht eine Kraft Q zu Grunde, sondern trägt einfach die Werte $\sum_y^e \Delta s$ oder s_{y-e} als Abscissen dieser Kurve auf, so ist dies (vgl. S. 101) gleichbedeutend mit der Annahme $Q = \frac{c t}{b}$; dann wird

$$\varkappa = \frac{b F K}{J} = \frac{b K}{i^2}.$$

Dieser Weg ist der bequemste und einfachste, wenn man die Scherspannungen nicht zu kennen wünscht; K hat man jedoch jetzt nicht mehr als Kraft, sondern als Linie abzugreifen.

Fig. 54.



Eine leicht fassliche Vorstellung von der Grösse des Verschiebungscoefficienten erlangt man ferner, wenn man die τ in irgend einem Massstabe senkrecht zum Querschnitt aufträgt; dann bestimmen ihre Endpunkte eine krumme Fläche, die mit der Grundebene das Volumen V einschliesse. Ist S' (Fig. 54) der Schwerpunkt dieses Körpers und s seine Entfernung vom Schwerpunkt S der Figur, so ist

$$V . s = {}^1/_2 \Sigma \tau^2 . \Delta F$$

und hiernach, da zugleich $V = Q$ ist,

$$\varkappa = \frac{2 F s}{V}.$$

Für ein Rechteck wird die Kurve der τ zu einer Parabel (vgl. S. 89), die krumme Fläche somit eine cylindrisch-parabolische; ist τ_s die grösste aller Spannungen, so ist hiernach $V = {}^2/_3 F \tau_s$ und $s = {}^2/_5 \tau_s$; es ergibt sich somit, wie schon oben bemerkt wurde, $\varkappa = {}^6/_5$.

Für ein Doppel-T-Profil verläuft die Kurve der Schubspannungen innerhalb des Steges nahezu geradlinig und fällt im Kopf

und Fuss rasch herunter; (vgl. die Textfigur 41, S. 95, und die Figuren 3—5 auf der Tafel 3). Nennt man den Flächeninhalt des Kopfes wie früher F_1, denjenigen des Steges F_2 und die Spannung im Schwerpunkte τ_s, so ist nahezu $V = F_2 \tau_s$ und die Strecke $s = {}^1/_2 \tau_s$. Obiger Coefficient ergibt sich demnach angenähert

$$\varkappa = \frac{2\,F s}{V} = \frac{2\,F \, . \, {}^1/_2 \tau_s}{F_2 \, . \, \tau_s} = \frac{F}{F_2},$$

das heisst gleich dem Gesamtquerschnitt dividirt durch den Stegquerschnitt; sein genauer Wert ist stets etwas kleiner und lässt sich zeichnerisch unschwierig bestimmen (vgl. Nr. 36).

33. Vereinigte Wirkung von P und Q.

In den beiden vorhergehenden Nummern haben wir die elastischen Formänderungen eines Balkenelementes unter der Wirkung verschiedener äusserer Kräfte einzeln untersucht. Es ergab sich, dass die Normalkraft P, wo sie auch liegen möge, eine Drehung des einen Querschnittes gegenüber dem andern um die Antipolare des Angriffspunktes von P hinsichtlich der Centralellipse des Querschnittes bewirkt; der Drehungswinkel ist, wenn M das Moment von P hinsichtlich der Schwerpunktsaxe und J das Trägheitsmoment der Figur bedeutet, $\varDelta \delta = \frac{M \, . \, \varDelta s}{J \, . \, E}$. Die Kraft Q sodann haben wir in ein Kräftepaar M_t und eine parallele, gleich grosse, durch den Schwerpunkt gehende Kraft zerlegt; ersteres erzeugt eine Drehung des einen Querschnittes gegenüber dem anderen um eine auf dem Schnitte senkrecht stehende Axe. Die Lage dieser letzteren und der Drehungswinkel lassen sich im Allgemeinen nur für einfache Figuren genau angeben; bei doppelt symmetrischen Figuren geht die Axe natürlich durch den Schwerpunkt. Die nach dem Schwerpunkt verlegte Kraft Q endlich erzeugt eine Parallelverschiebung des einen Querschnittes gegenüber dem andern von der Grösse $\varDelta q = \varkappa \frac{Q \, . \, \varDelta s}{F \, . \, G}$, worin $\varkappa$ einen nur von der Querschnittsform abhängigen Factor bezeichnet.

Angenommen nun, es sei möglich, den Einfluss des Torsionsmomentes auf ein Balkenelement zu bestimmen, so lässt sich dieser Einfluss stets mit der Wirkung der durch den Schwerpunkt

gehenden Kraft Q vereinigen, und zwar erfolgt hierbei als Gesamtbewegung eine Drehung um eine parallel verschobene, auf dem Schnitte senkrecht stehende Axe. Wahrscheinlich gibt es sogar eine, nur von der Querschnittsfigur abhängige Ellipse, hinsichtlich welcher der Drehpunkt und die Scherkraft antipolar liegen. Man könnte sie die Torsionsellipse nennen. Dann lässt sich sagen: Die Normalkraft dreht um ihre Antipolare hinsichtlich der Centralellipse und die Transversalkraft um ihren Antipol hinsichtlich der Torsionsellipse.

Die beiden Axen, um welche die Kräfte P und Q Drehungen bewirken, können sich nun schneiden oder auch nicht. Schneiden sie sich, so lassen sich die beiden Drehbewegungen in eine einzige vereinigen. Man betrachtet zu diesem Behufe die beiden Drehungswinkel als Kräfte, die in den beiden Axen liegen, und bestimmt ihre Mittelkraft; die Lage dieser letzteren gibt dann die neue Drehaxe und ihre Grösse den Drehwinkel an. Schneiden sich dagegen die beiden Axen nicht, so kann die Bewegung des Querschnittes nicht als einfache Drehung dargestellt werden, sondern muss als Schraubenbewegung angesehen werden.

Die beiden Drehaxen schneiden sich, wenn die Kräfte P und Q beide durch den Schwerpunkt gehen, ferner wenn P den Querschnitt in einer Axe der Centralellipse trifft und Q mit dieser Axe zusammenfällt, ebenso wenn P durch den unendlich fernen Punkt einer Ellipsenaxe geht und Q zu dieser Axe parallel läuft; endlich wenn beide Kräfte unendlich fern sind. In allen diesen Fällen schneiden sich auch die beiden Kräfte. Ausserdem können sich die beiden Axen schneiden, ohne dass die Kräfte eine in die Augen springende spezielle Lage haben.

Bemerkenswert ist, dass die Drehaxen sich nicht immer schneiden, wenn die beiden Kräfte es thun, wie man leicht versucht ist, zu vermuthen. Fällt zum Beispiel die Kraft Q mit einem Durchmesser der Centralellipse (aber nicht mit einer Axe) zusammen, während P den Querschnitt im unendlich fernen Punkt dieses Durchmessers trifft, so geht die Drehaxe von Q durch den unendlich fernen Punkt des senkrechten Durchmessers; die Drehaxe von P jedoch ist der conjugirte Durchmesser. Dieser Fall tritt ein, wenn ein horizontal gelagerter und vertical belasteter Balken eine schief stehende Centralellipse besitzt. (Vergleiche die Figur 33 auf der Seite 87.) Sollen die Formänderungen eines solchen Balkens be-

stimmt werden, so ist es wohl am einfachsten, die Drehung, welche P bewirkt, in eine Drehung mit verticaler und eine mit horizontaler Drehaxe zu zerlegen und letztere mit der von Q bewirkten Drehung zu vereinigen. —

In der Praxis kommt der Fall am häufigsten vor, dass der Angriffspunkt von P in einer Axe der Centralellipse (sagen wir der vertical stehenden) liegt und Q mit dieser Axe zusammenfällt; dann lassen sich die Wirkungen beider auf die folgende Weise vereinigen.

Die Kraft P dreht um die Antipolare ihres Angriffspunktes, um die horizontal liegende neutrale Axe. Die Drehaxe von Q ist die unendlich ferne Gerade der zu Q senkrechten Ebene. Beide Bewegungen vereinigt ergeben eine Drehung, deren Axe man erhält, wenn man die neutrale Axe in horizontaler Richtung verschiebt. Die Grösse dieser Verschiebung ist gleich der durch Q bewirkten Querschnittsverschiebung, dividirt durch den von P erzeugten Drehungswinkel, also gleich $\frac{\varDelta q}{\varDelta \delta} = \varkappa \frac{Q \,.\, \varDelta s}{F \,.\, G} : \frac{M \,.\, \varDelta s}{J \,.\, E}$, oder da $M = Pp$ und $J = F i^2$ ist, gleich $\frac{Q\, i^2 \varkappa E}{P p\, G}$.

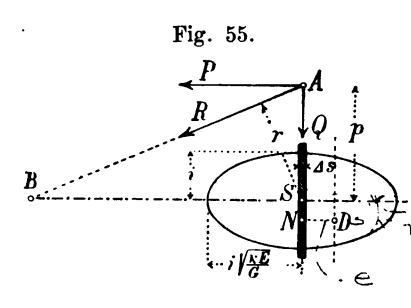


Fig. 55.

Es stelle nun die Figur 55 die Längsansicht eines Balkenelementes $\varDelta s$ dar, welches durch zwei unendlich benachbarte Querschnitte begrenzt wird; S sei dessen Schwerpunkt und R die äussere Kraft. Dann bewirkt die Normalcomponente P eine Drehung um die Axe N, welche zu A antipolar liegt; fügt man die Wirkung von Q hinzu, so verschiebe sich diese Axe um obigen Wert nach D. Nun verhält sich

$$P : Q = BS : AS = BS : p;$$

es ist daher $BS = \frac{Pp}{Q}$ und folglich

$$ND = \left(\frac{i^2 \varkappa E}{G}\right) : BS.$$

Da nun nicht nur die Horizontale durch D zu A, sondern auch die Verticale durch D zu B involutorisch liegt, so ist D der Antipol der Kraft R hinsichtlich einer Ellipse mit dem

Mittelpunkte S und den Halbaxen i und $i\sqrt{\frac{\varkappa E}{G}}$. Beachtet man noch, dass das Moment M nicht nur gleich Pp, sondern auch gleich Rr ist, so kann man zusammenfassend sagen:

Die äussere Kraft R dreht den einen Querschnitt gegenüber dem anderen um den Winkel $\Delta\delta = \frac{M . \Delta s}{J . E}$, worin M ihr statisches Moment hinsichtlich des Schwerpunktes, Δs die Länge des Balkenelementes und J das Trägheitsmoment des Querschnittes bedeutet; der Drehpunkt ist der Antipol der Kraft R hinsichtlich einer Ellipse, deren kleine Axe sich mit der verticalen Axe der Centralellipse des Querschnittes deckt, und deren grosse Axe sich zur kleinen Axe verhält wie $\sqrt{\varkappa E} : \sqrt{G}$.

Die neue Ellipse, welche uns bei dieser Aufgabe so wesentliche Dienste leistet, wollen wir in der Folge zum Unterschied gegen die früher genannten Ellipsen die «Elasticitätsellipse» des Balkenelementes nennen. Wir werden von ihr und dem obigen Satze in allen unseren Untersuchungen über elastische Formänderungen ausgiebigsten Gebrauch machen.

Das Verhältnis $\sqrt{\varkappa E} : \sqrt{G}$ lässt sich für gegebene Querschnittsfiguren stets zum Voraus berechnen; setzt man (nach Nr. 30) G gleich $^2/_5\, E$, so wird das Axenverhältnis der Elasticitätsellipse gleich $\sqrt{2{,}5\varkappa}$, oder (vgl. S. 148—150) für rechteckige Querschnitte gleich 1,73, für kreisförmige gleich 1,67, für doppel-T-förmige annähernd gleich $1{,}6\sqrt{\frac{\text{Gesamtfläche}}{\text{Stegfläche}}}$. Bestimmt man $\varkappa$ für unregelmässige Profilformen zeichnerisch nach dem auf der Seite 148 angegebenen Verfahren, wobei man $\varkappa = \frac{b\,K}{i^2}$ erhält, so wird die horizontale Halbaxe der Elasticitätsellipse $i' = i\sqrt{\frac{\varkappa E}{G}} = \sqrt{\frac{E\,b}{G} . K}$ und kann direct bestimmt werden, ohne dass man vorerst den Factor $\varkappa$ aufsucht.

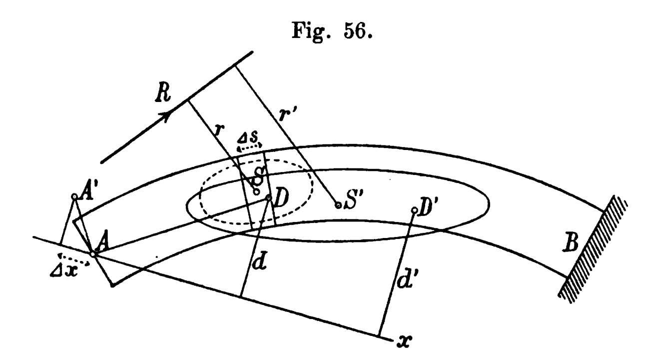
Will man bei der Bestimmung der Formänderungen den Einfluss der Kraft Q vernachlässigen, so hat man einfach $G = \infty$ zu setzen, das heisst die horizontale Axe der Elasticitätsellipse verschwinden zu lassen.

34. Formänderung eines ganzen Stabes.

Von der elastischen Formänderung eines einzelnen Elementes kann man nun zu derjenigen eines ganzen Stabes übergehen.

Es sei der Einfluss zu bestimmen, welchen (Figur 56) die Kraft R auf den am rechten Ende eingespannten Balken AB ausübt.

Fig. 56.



Denkt man sich zunächst nur das eine Element Δs elastisch, so dreht sich nicht nur die linksseitige Begrenzung dieses Elementes, sondern damit auch der links davon liegende Balkenteil AS um den Punkt D, den Antipol der Kraft R hinsichtlich der Elasticitäts-ellipse S. Der Punkt A bewegt sich hierbei in einem Kreisbogen, dessen Mittelpunkt in D liegt. Da jedoch der Drehungswinkel $\Delta \delta = \frac{R \,.\, r \,.\, \Delta s}{J \,.\, E}$ ausserordentlich klein ist, so können wir an die Stelle des Bogenstückes die Tangente setzen und sagen, der Punkt A verschiebe sich senkrecht zu AD nach A' um die Strecke

$$AA' = AD \,.\, \Delta\delta = \frac{R \,.\, r \,.\, AD \,.\, \Delta s}{J \,.\, E}.$$

Legt man ferner durch A eine beliebig gerichtete Axe Ax und zerlegt die Verrückung des Punktes A parallel und normal zu dieser Axe, so verhält sich wegen Aehnlichkeit der betreffenden Dreiecke die Parallelcomponente, das heisst die Verrückung in der Richtung der x-Axe

$$\Delta x : AA' = d : AD;$$

es ist daher

$$\Delta x = d \,.\, \Delta\delta = \frac{R \,.\, r \,.\, d \,.\, \Delta s}{J \,.\, E}.$$

Diesem Ausdruck lässt sich nun ein Begriff unterschieben, welcher der Theorie des Trägheitsmomentes und der Centralellipse ebener Figuren entlehnt ist. Bekanntlich ist das Centrifugalmoment einer ebenen Figur hinsichtlich zweier Axen gleich deren Flächeninhalt, multiplicirt mit dem Abstand des Schwerpunktes von der einen Axe und mit dem Abstand des Antipols der ersten Axe von der zweiten. (Vergleiche den ersten Band von Culmanns Graph. Statik, 2. Aufl., Seite 404.)

Betrachtet man nun die Grösse $\frac{\varDelta s}{J \,.\, E}$ als den Inhalt einer Figur, deren Centralellipse mit der Elasticitäts-Ellipse S identisch ist, so ist $r \,.\, d \,.\, \frac{\varDelta s}{JE}$ nichts anderes als das Centrifugalmoment dieser Figur in Bezug auf die Richtungslinie von R und die Axe Ax.

Den Wert $\frac{\varDelta s}{JE}$ wollen wir in Zukunft das «elastische Gewicht» oder kurz das «Gewicht» des Balkenelementes nennen und mit $\varDelta G$ bezeichnen. Dann kann man sagen:

Belastet man den Schwerpunkt S des Balkenelementes mit dem Gewichte $\frac{\varDelta s}{JE}$, und weist diesem die Elasticitätsellipse als Centralellipse zu, so dreht sich das Balkenstück AS um einen Winkel, welcher gleich ist der Kraft R mal dem statischen Momente des Gewichtes in Bezug auf die Kraftrichtung, und der Punkt A verschiebt sich in der Richtung der x-Axe um eine Strecke, welche gleich ist der Kraft R, multiplicirt mit dem Centrifugalmomente des Gewichtes hinsichtlich der Kraftrichtung und der x-Axe.

Denkt man sich nun den ganzen Balken AB in unendlich kleine Elemente von der Dicke $\varDelta s$ zerlegt, die sich sämtlich unter dem Einfluss von R deformiren, so summiren sich ihrer Kleinheit wegen die einzelnen Drehungen und Verschiebungen: der Winkel, um welchen sich der Querschnitt A dreht (während B festgehalten wird), ist gleich R mal der Summe der einzelnen statischen Momente, und die Verrückung längs der x-Axe gleich R mal der Summe der einzelnen Centrifugalmomente.

Diese beiden Summen bestimmt man am leichtesten dadurch, dass man die einzelnen Gewichte mit ihren Centralellipsen zu einem

Gesamtgewichte mit entsprechender Ellipse vereinigt. Der hierbei einzuschlagende Weg ist der nämliche, welcher zur Construction der Centralellipse zusammengesetzter Figuren dient. Im Allgemeinen wird man zu diesem Zwecke in der graphischen Statik am besten Seilpolygone verwenden, aus welchen sich auf bekannte Weise der Schwerpunkt und die Trägheits- und Centrifugalmomente für zwei Schwerpunktsaxen ergeben. (Vgl. Nr. 116 und Taf. 13 in Culmanns Graph. Statik.) Wir werden im Abschnitt über den elastischen Bogen auf diese Arbeiten zurückkommen und setzen hier zunächst voraus, es sei die Elasticitätsellipse des ganzen Balkens auf irgend eine Weise bestimmt worden.

Ist dann (Fig. 56) die ausgezogene Ellipse mit dem Mittelpunkte S' diejenige, welche sich bei der Vereinigung der Einzelellipsen ergeben hat, und bezeichnet man das Gesamtgewicht $\Sigma(\Delta G)$ $= \Sigma\left(\frac{\Delta s}{J E}\right)$ kurz mit G, so ist, nach den oben ausgesprochenen Beziehungen des Centrifugalmomentes zur Centralellipse, der Drehungswinkel des Querschnittes A gegenüber B

$$\delta = R \, . \, G \, . \, r'$$

und die Verschiebung des Punktes A längs Ax

$$x = R \, . \, G \, . \, r' \, . \, d',$$

wenn D' der Antipol der Kraftrichtung bezüglich der ausgezogenen Ellipse ist.

Die Richtung der x-Axe ist hierbei ganz beliebig; wir können sie auch durch D' führen; dann verschwindet d' und mit ihm x; die Verrückung von A in der Richtung AD' ist somit gleich null; mit andern Worten, A bewegt sich in einer Senkrechten zu AD'. Führt man sodann die Axe senkrecht zu AD', so ergibt sich die Verschiebung x gleich $\delta \, . \, AD'$. Wir können somit auch im Blick auf den ganzen Balken den Antipol von R als den Punkt ansehen, um welchen sich der Endquerschnitt dreht.

Spannt man den Balken bei A ein und lässt das Ende B sich bewegen, so bleibt die Ellipse die nämliche; der Punkt D' ist also auch in diesem Falle Drehpunkt.

Alles zusammenfassend, gelangen wir nun zu folgenden interessanten und wichtigen Resultaten:

Belastet man die Schwerpunkte der Balkenelemente mit den Gewichten $\frac{\Delta s}{J E}$, weist ihnen ihre

Elasticitätsellipsen als Centralellipsen zu und vereinigt sämtliche Ellipsen zu einer Gesamtellipse, so vollzieht das eine Balkenende gegenüber dem andern eine Drehung um den Antipol der äusseren Kraft hinsichtlich der Gesamtellipse; der Drehungswinkel ist gleich der Kraft mal dem auf die Kraftrichtung bezogenen statischen Momente des Gesamtgewichtes, und die Verrückung des einen Balkenendes längs einer beliebigen Axe ist gleich der Kraft mal dem auf die Kraftrichtung und diese Axe bezogenen Centrifugalmomente des Gesamtgewichtes.

Hieraus lassen sich sofort folgende zwei Spezialfälle ableiten:

Steht ein Balken unter dem Einfluss einer unendlich kleinen, unendlich fernen Kraft (eines Kräftepaares), so dreht sich das Balkenende um den Mittelpunkt der Elasticitätsellipse und der Drehwinkel ist gleich dem statischen Momente der Kraft mal dem elastischen Gewichte des Balkens.

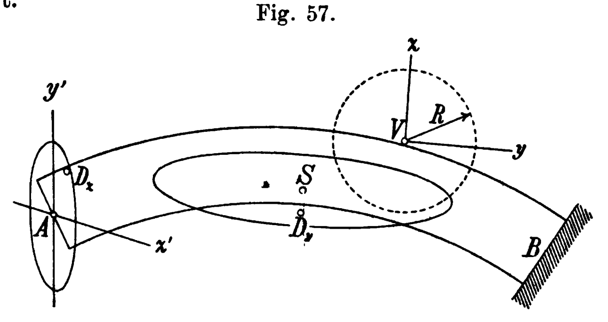
Geht die Kraft R durch den Mittelpunkt der Ellipse, so vollzieht das Balkenende eine Parallelbewegung senkrecht zu dem der Kraft conjugirten Durchmesser. (Die Bewegung ist hierbei nur dann zur Kraftrichtung parallel, wenn R mit einer der Ellipsenaxen zusammenfällt.) Die Grösse der Bewegung ist gleich R mal dem auf die Kraft- und die Bewegungsrichtung bezogenen Centrifugalmomente; letzteres berechnet sich entweder mittelst des Antipols der Bewegungsrichtung oder dadurch, dass man in den Endpunkten des zu R conjugirten Durchmessers je die Hälfte des Gesamtgewichts concentrirt denkt. (Vergleiche Seite 405 in Culmanns Graphischer Statik.)

Interessant ist auch, dass das Balkenende eine Ellipse beschreibt, während sich die Kraft um einen Punkt dreht. Denn zerlegt man hierbei (Figur 57) die Kraft parallel zu zwei aufeinander senkrechten Axen Vy und Vz in je zwei Seitenkräfte, so entsprechen diesen zwei Verschiebungscomponenten parallel zu zwei bestimmten Richtungen Ay' und Az', welche senkrecht stehen zu den Verbindungslinien des Punktes A mit den Antipolen D_y und D_z von Vy und Vz. Da nun die Verschiebungscomponenten den Kraftcomponenten proportional bleiben und letztere die laufenden Coordinaten eines Kreises sind, so bilden die Verschiebungscomponenten die Coordinaten einer zum Kreise in affiner Verwandtschaft stehenden

Kurve, also eines Kegelschnittes, und zwar sind in diesem die Richtungen Ay' und Az' einander conjugirt.

Jedem Paar rechtwinkliger Axen durch V entspricht hierbei ein Paar conjugirter Durchmesser der Verschiebungsellipse; einem speziellen Paar entsprechen die Ellipsenaxen, woraus folgt: Die beiden Kraftrichtungen, welche die grösste und kleinste Verschiebung bewirken, (wir wollen sie Hauptrichtungen nennen), stehen aufeinander senkrecht.

Fig. 57.



Liegt V in der Antipolaren von A, so verschwindet die eine Ellipsenaxe und A bewegt sich, während die Kraft um V sich dreht, in einer geraden Linie.

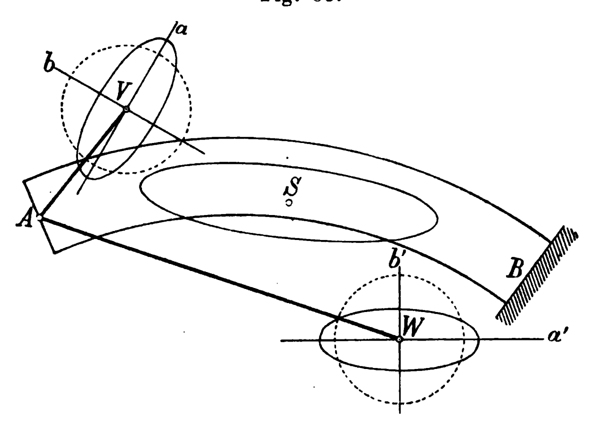
Anstatt die Bewegungen des Punktes A zu verfolgen, kann man auch irgend einen andern Punkt W in Betracht ziehen, der mit dem Endquerschnitt A durch einen starren, unelastischen Stab verbunden ist. Alle bisher abgeleiteten Gesetze gelten ohne weiteres auch für diesen neuen Punkt. Um dieses einzusehen, braucht man bloss den Verbindungsstab WA als eine Fortsetzung des Balkens anzusehen und ihm ein unendlich grosses Trägheitsmoment (oder auch einen unendlich grossen Elasticitätscoefficienten) beizulegen; dann wird sein Gewicht null und die Elasticitätsellipse bleibt die gleiche wie vorher.

Denkt man sich nun (Figur 58) zwei Punkte V und W durch solche unelastische Stäbe mit A verbunden, so bewirkt eine um V sich drehende Kraft eine Verschiebungsellipse um W. Lässt man aber die Kraft auf W einwirken und verfolgt die Bewegungen des Punktes V, so beschreibt auch dieser eine Ellipse. Diese beiden Ellipsen sind, wie Herr Privatdozent Dr. Forchheimer zuerst nachgewiesen hat, congruent.

Lässt man nämlich ein Paar aufeinander senkrecht stehender Strahlen um V sich drehen und projicirt deren Antipole aus W, so

erhält man in W einen involutorischen Büschel; das Rechtwinkelpaar desselben stellt die Axen der Verschiebungsellipse W dar und die entsprechenden Strahlen durch V enthalten die beiden Kraftrichtungen, welche in W das Maximum und Minimum der Verschiebung erzeugen. Bestimmt man nun umgekehrt die Antipole der um W sich drehenden rechtwinkligen Strahlen, projicirt sie aus V und bestimmt in dem hier entstehenden involutorischen Büschel das Rechtwinkelpaar, so fällt dieses mit den vorhin bestimmten Hauptrichtungen zusammen. Denn wenn Va und Vb die Kraftrichtungen für die Verschiebungen Wa' und Wb' sind, so enthält Wb' den Antipol von Va und Wa' denjenigen von Vb. Daraus folgt aber nach der Polarentheorie, dass auch Va den Antipol von Wb' und Vb denjenigen von Wa' enthält. Die Senkrechten zu Va und Vb sind somit die Verschiebungsrichtungen für die Kraftrichtungen Wa' und Wb' und, da sie aufeinander senkrecht stehen, zugleich die Axen der Ellipse.

Fig. 58.



Die beiden Hauptrichtungen der Kräfte und die Ellipsenaxen decken sich somit gegenseitig. Dass aber jetzt die Ellipsenaxen gleich gross sein müssen, folgt einfach aus dem Umstande, dass die Verrückungen den Centrifugalmomenten des Stabgewichtes, bezogen auf Kraft- und Verschiebungsrichtung proportional sind. Die Verrückung, welche W in der Richtung Wa' erleidet, wenn eine Kraft in der Richtung Va wirkt, ist daher gleich gross wie diejenige, welche V in der Richtung Va erfährt, wenn die nämliche Kraft den Punkt W in der Richtung nach a' angreift.

Dreht sich die Kraft um den Punkt V, so bewegt sich ihr Antipol auf der Antipolaren von V, und lässt man zwei aufeinander senkrecht stehende Strahlen um V sich drehen, so bilden deren Antipole eine involutorische Reihe. Nun gibt es stets zwei (zur Antipolaren von V symmetrisch liegende) Punkte, von welchen aus diese Involution durch rechte Winkel projicirt wird. Für diese beiden Punkte stehen daher sämtliche conjugirte Durchmesser der Verschiebungsellipse aufeinander senkrecht, das heisst die Verschiebungsellipse wird für diese beiden Punkte zum Kreise.

Andererseits geht die Ellipse (wie schon früher bemerkt wurde) in eine gerade Linie über, wenn der Punkt W auf der Antipolaren von V liegt.

Ferner ergibt sich leicht, dass die Verschiebungsellipsen für alle Punkte W (bezw. V) der Ebene congruent werden, wenn der Punkt V (bezw. W) mit dem Mittelpunkte S der Elasticitätsellipse zusammenfällt. —

Hinsichtlich der Bestimmung der Elasticitätsellipsen ganzer Balken sei noch Folgendes bemerkt.

Wie schon gesagt, werden hierzu im Allgemeinen Seilpolygone verwendet. In dem Falle jedoch, wo die Axe des Stabes geradlinig und sein Querschnitt constant ist, lässt sich die Ellipse wesentlich einfacher bestimmen.

Die Ellipsen der einzelnen Balkenelemente sind nämlich in diesem Falle sämtlich congruent und ihre Mittelpunkte liegen auf einer Geraden. Daraus folgt, dass (Figur 59) die kleine Halbaxe i_2 der Gesamtellipse gleich derjenigen der Einzelellipsen ist. Die grosse Halbaxe i_1 dagegen findet sich durch folgende Rechnung.

Das Trägheitsmoment des ganzen Gewichtes, bezogen auf die verticale Axe durch S' ist nämlich nach der in der Figur 59 eingeschriebenen Bezeichnung

$$G \,.\, i_1^2 = \Sigma \Delta G \,(x^2 + i'^2)$$

oder, wenn man $\Delta G = \frac{\Delta x}{J.E}$, $G = \Sigma \Delta G = \frac{s}{J.E}$ setzt,

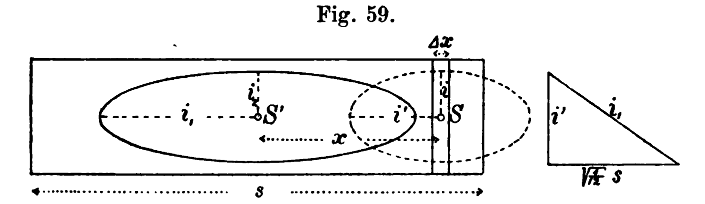
$$\frac{s}{J.E}\, i_1^2 = \Sigma \frac{\Delta x}{J.E}\,(x^2 + i'^2)$$

woraus sich, wenn man von $-\frac{s}{2}$ bis $+\frac{s}{2}$ summirt, ergibt

$$i_1^2 = {}^1/_{12}\, s^2 + i'^2.$$

Bildet man daher ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $\sqrt{1/12}\, s$ und i', so stellt dessen Hypotenuse die grosse Halbaxe der Gesamtellipse dar.

Fig. 59.



Bei langen, schmalen Stäben überwiegt hierbei die erstere Kathete so sehr, dass man die letztere vernachlässigen und einfach

$$i_1 = \sqrt{\tfrac{1}{12}}\, s = 0{,}289\, s$$

setzen darf.

35. Die elastische Linie gerader Balken.

Die Kurve, in welche die Axe eines geradlinigen Balkens übergeht, wenn letzterer sich unter der Wirkung äusserer Kräfte verbiegt, nennt man seine elastische Linie. Da Torsionsmomente bloss Drehungen um die Axe des Balkens bewirken, so haben sie, so lange die Formänderungen als unendlich klein angesehen werden können, auf die elastische Linie keinen nennenswerten Einfluss und dürfen deshalb von vornherein aus dem Spiele gelassen werden.

In der Regel vernachlässigt man auch die in der Balkenaxe wirkenden Kräfte, da sie (abgesehen von dem in der Nummer 37, S. 170, behandelten Ausnahmefall) die Form der elastischen Linie nicht merklich ändern. Ueberhaupt wird, wenn von elastischer Linie die Rede ist, gewöhnlich nur danach gefragt, um wie viel sich die einzelnen Punkte der Axe von der ursprünglichen geraden Linie entfernen, und einer etwaigen Verschiebung parallel zu dieser Axe wird keine weitere Aufmerksamkeit geschenkt. Alsdann kommen als äussere Kräfte nur noch unendlich ferne Normalkräfte und durch den Schwerpunkt gehende Transversalkräfte in Betracht.

Der Einfachheit wegen wollen wir noch einen Schritt weiter gehen und voraussetzen, dass diese äusseren Kräfte sämtlich in einer verticalen Ebene liegen, welche zugleich die einen Axen sämtlicher Centralellipsen enthält; dann stehen alle Drehaxen der Balken-

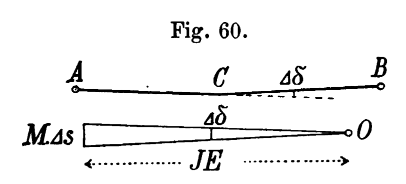
elemente auf dieser Ebene normal und die elastische Linie bleibt in ihrer ganzen Ausdehnung ebenfalls in dieser Ebene. Dieser in der Praxis fast ausnahmslos vorliegende Fall möge zunächst besprochen und an einem Beispiele erläutert werden.

Nach dem am Schlusse der Nummer 33 abgeleiteten Satze lässt sich die elastische Formänderung eines Balkenelementes, sobald die Kraft R mit einer der Ellipsenaxen in einer Ebene liegt, als eine Drehung um einen Punkt ansehen, welcher der Antipol von R bezüglich der Elasticitätsellipse ist. Vernachlässigt man nun die mit der Axe zusammenfallende Componente der äusseren Kraft, so beschränkt sich R auf eine parallel zum Querschnitt gerichtete Kraft, und der Antipol D (Figur 55) kommt alsdann in die Axe des Balkens zu liegen.

Denkt man sich nun den ganzen Balken in unendlich kleine Elemente geteilt und für jedes derselben die Elasticitätsellipse gezeichnet, so lässt sich, wie auch der Balken belastet sein mag, für jedes Element der Drehpunkt D und der Drehwinkel $\Delta\delta$ bestimmen und aus diesen Werten zusammen die elastische Linie bilden. Sehen wir nun, wie diese Aufgabe auf graphischem Wege gelöst werden kann. Herrn Professor Baurat Mohr gebührt das Verdienst, das hierzu taugliche Verfahren in seinen Grundzügen aufgestellt und zur Berechnung von continuirlichen Balken verwendet zu haben.

Setzen wir zunächst voraus, es deformire sich von den zahlreichen Elementen des Balkens bloss ein einziges. Dann wird die geradlinige Balkenaxe an der betreffenden Stelle eine schwache Knickung annehmen, deren Mass durch den Drehwinkel $\Delta\delta = \frac{M.\Delta s}{J.E}$ gegeben ist. Dieser stets ausserordentlich kleine Winkel lässt sich auf zeichnerischem Wege dadurch bestimmen, dass man (Figur 60) ein Dreieck mit der Spitze O zeichnet, dessen Grundlinie in irgend einem Massstabe gleich $M.\Delta s$ und dessen Höhe gleich $J.E$ ist. Betrachtet man sodann dieses Dreieck als ein Kräftepolygon und zeichnet ein entsprechendes Seilpolygon ACB so, dass C vertical unter dem Drehpunkte D des genannten Elementes liegt, so stellt die gebrochene Linie ACB die Form des geknickten Balkens dar. Nun ist es nicht schwer, dieses Verfahren auf alle Elemente

Fig. 60.



auszudehnen; man gelangt hierbei auf ein Seilpolygon mit eben so vielen Ecken, als Elemente vorhanden sind, und wenn deren Zahl unendlich gross ist, auf eine Kurve, die elastische Linie.

Bei dieser Construction sind die Kräfte $M.\Delta s$ streng genommen fortwährend senkrecht zu den Strahlen aus O aufzutragen. Wenn aber die elastische Linie eine sehr flache, von der geraden Linie nur wenig abweichende Kurve bildet, was bei den in der Praxis vorkommenden Fällen fast immer zutrifft, so weichen auch die Strahlen des Kräftepolygons nur unbedeutend von der horizontalen Richtung ab, und es ist in diesem Falle gestattet, die Kräfte vertical aufzutragen. Es ergibt sich daher folgende Regel:

Um die elastische Linie eines geraden Balkens zu zeichnen, teile man ihn in Elemente von der Länge Δs, betrachte die Produkte $M.\Delta s$ als verticale Kräfte, die in den Antipolen der äusseren Kräfte hinsichtlich der Elasticitätsellipsen wirken, bilde aus ihnen ein Kräftepolygon mit der Poldistanz $J.E$ und verbinde sie durch ein Seilpolygon.

Ist hierbei das Trägheitsmoment J variabel, so zeichnet man ein Kräftepolygon mit veränderlichem Pole. (Vgl. Tafel 6_7.)

Trägt man hierbei die Kräfte $M.\Delta s$ und die Polweiten $J.E$ im gleichen Massstab auf, was auf den ersten Blick das naturgemässeste scheint, so erhält man zwar die elastische Linie in richtiger Form, erreicht jedoch in der That wenig, weil sich die krumme Linie von der geraden kaum unterscheiden lässt. Es ist daher bei der praktischen Verwendung obiger Methode üblich, die elastische Linie vertical zu verzerren, was dadurch geschieht, dass man für die Kräfte und für die Poldistanzen verschiedene Massstäbe wählt; das Verhältnis der beiden Massstäbe ist zugleich das Verzerrungsverhältnis.

In der Regel sind die Momente M durch die sogenannte Momentenfläche gegeben, welche entsteht, wenn man die verticalen Belastungen des Balkens durch ein geschlossenes Seilpolygon zusammensetzt; wird hierbei H als Poldistanz verwendet und bezeichnet man die Ordinaten der Momentenfläche mit y, so ist bekanntlich $M = H.y$. Um sodann die $M.\Delta s$ als Kräfte auftragen zu können, teilt man die Momentenfläche, der Balkenteilung entsprechend, in Streifen von der Breite Δs und verwandelt deren Flächeninhalte auf eine Basis a. Wählt man schliesslich als Poldistanz des zweiten

11*

Kräftepolygons die Linie h, so wird bei diesem Vorgange für ein einzelnes Balkenelement der Winkel

$$\Delta \delta = \frac{y \, . \, \Delta s}{a} : h = \frac{M \, . \, \Delta s}{H \, . \, a \, . \, h}.$$

Soll dieser Wert mit dem auf der Seite 162 stehenden identisch sein, so muss man die drei willkürlichen Grössen H, a und h derart wählen, dass ihr Produkt gleich $J \, . \, E$ wird. Bei veränderlichem Trägheitsmoment wird auch h veränderlich, aber stets proportional J genommen.

Thatsächlich erfüllt man jedoch diese Bedingung aus dem oben angeführten Grunde nicht, sondern wählt die drei Grössen so, dass ihr Produkt nur einen Bruchteil von $J \, . \, E$ ausmacht; dann erscheint die elastische Linie verzerrt und das Verzerrungsverhältnis ist

$$z = \frac{J \, . \, E}{H \, . \, a \, . \, h}.$$

Zuweilen mag es angenehm sein, $1 : z$ gleich dem für die Zeichnung gewählten Längenmassstab zu machen; dann erscheinen die Ordinaten der elastischen Linie in natürlicher Grösse.

Dass man beim Zeichnen der elastischen Linie nicht mit unendlich vielen Balkenelementen arbeiten kann, versteht sich von selbst; man wird sich auf eine mässige Anzahl beschränken und sich bei der Einteilung in Elemente der Belastung und den Querschnittsänderungen anpassen. Bleibt auf eine längere Strecke die äussere Kraft, sowie das Trägheitsmoment der Querschnitte constant, so lässt sich diese Strecke auch als ein einziges Element behandeln; nur muss dieses, weil es nicht mehr unendlich klein ist, als ein ganzer Balken angesehen und seine Elasticitätsellipse nach Anleitung der Figur 59 (Seite 161) gezeichnet werden.

Auf die daselbst erläuterte Weise können Balkenelemente überall da, wo R und J eine Strecke weit constant bleiben, zusammengezogen werden. Selbst da, wo diese beiden Grössen kleinen Schwankungen unterworfen sind, kann unter Einführung von Mittelwerten von diesem abkürzenden Verfahren Gebrauch gemacht werden.

In der Praxis wird von dem Einfluss der Scherspannungen häufig abgesehen; die Einsenkungen der Balken ergeben sich dann kleiner, wie wir in der nächsten Nummer an einem Beispiele zeigen werden. Die Vernachlässigung der transversalen Elasticität macht um so mehr aus, je höher der Balken im Verhältnis zu seiner Länge

ist, weil mit zunehmender Höhe auch die horizontalen Axen der Ellasticitätsellipsen zunehmen. Bei gewissen Aufgaben ist jedoch diese Vernachlässigung der Transversalverschiebung gestattet, so zum Beispiel bei der Berechnung der Pfeilermomente continuirlicher Balken, weil es da (gleich hohe Stützen vorausgesetzt) nicht auf das absolute Mass der Durchbiegungen, sondern mehr auf die gegenseitigen Verhältnisse derselben ankommt.

Am einfachsten beseitigt man die Wirkung der Scherkraft auf die Formänderung dadurch, dass man den Gleitmodul unendlich gross annimmt. Die horizontale Ausdehnung der Elasticitätsellipsen verschwindet in diesem Fall; die Ellipsen schrumpfen zu verticalen Linien von der Höhe $2\,i$ zusammen und die Folge hiervon ist, dass die Antipole der äusseren Kräfte mit den Schwerpunkten der betreffenden Elemente zusammenfallen. Teilt man nun den Balken wieder in unendlich viele Elemente, die Momentenfläche in eben so viele unendlich schmale Streifen ein und betrachtet die Flächeninhalte dieser letzteren als Kräfte, so fallen diese der Lage nach genau mit den Streifen zusammen. Vereinigt man mehrere Streifen zu einem einzigen, so geht die entsprechende Kraft durch den Schwerpunkt desselben. Man kann daher die Momentenfläche ganz unabhängig von der Lage der äusseren Kräfte einteilen und braucht sich hierbei nur an die Variation des Trägheitsmomentes J zu binden.

Ist letzteres für den ganzen Balken constant, so gilt der Satz: *Um die elastische Linie eines Balkens zu erhalten, betrachte man dessen Momentenfläche als Belastungsfläche und zeichne zu dieser ein Seilpolygon.*

36. Construction der elastischen Linie eines Blechbalkens.

(Tafel 6.)

Zur Erläuterung des im Vorstehenden beschriebenen Verfahrens haben wir auf der Tafel 6 die elastische Linie eines Blechbalkens von 8 *m* Spannweite und 0,6 *m* Stehblechhöhe gezeichnet.

Der Balken ist dazu bestimmt, gemeinsam mit einem zweiten, genau gleich starken Gefährten ein Eisenbahngeleise aufzunehmen, und die Querschnittsdimensionen sind so gewählt, dass nach den in

der Nummer 22 (Seite 93) gegebenen Regeln und Formeln die grösste Normalspannung sich gleich 0,65 *t* pro cm^2 herausstellt. Zu diesem Zwecke wurde zunächst für die Radgewichte einer 56 *t* schweren Lokomotive ein Seilpolygon gezeichnet und auf bekannte Weise durch Verschieben der Schlusslinie das grösste Biegungsmoment bestimmt; es ergab sich gleich 35,7 *mt*. Das eigene Gewicht der Brücke wurde ferner zu 1 *t* pro laufenden Meter geschätzt, woraus sich für jeden der beiden Träger ein Moment von 4,0 *mt* ergibt. Das Gesamtmoment beträgt somit 39,7 *mt*.

Um diesem zu widerstehen, ist der Balken aus einem Stehblech von 60 . 1,2 *cm*, vier Winkeleisen von 10 . 10 . 1 *cm* und sechs Kopfplatten von 26 . 1 *cm* zusammengesetzt. Die Gesamthöhe des Trägers ergibt sich hiernach gleich 66 *cm*, die Entfernung der Schwerpunkte von Kopf und Fuss dagegen gleich 60,2 *cm*; somit besitzt der Balken (bei Abzug der 16 cm^2 betragenden Nietlöcher) ein Widerstandsmoment (siehe Seite 94) von

$$\frac{h_s^2}{h}(F_1 + {}^1/_6 F_2) = \frac{60{,}2^2}{66}(100 + 12) = 6150\ cm^3,$$

und die grösste Spannung findet sich

$$\sigma = \frac{3970}{6150} = 0{,}65\ t \text{ pro } cm^2.$$

Aus dem Seilpolygon ergab sich ferner der grösste Auflagerdruck der zufälligen Belastung gleich 20,4 *t*; für das Eigengewicht sind 2,0 *t* hinzuzufügen, was zusammen 22,4 *t* ausmacht. Nach der auf der Seite 96 stehenden Formel beträgt daher die Scherspannung in der Stegmitte

$$\frac{22{,}4}{66\ .\ 1{,}2} = 0{,}28\ t \text{ pro } cm^2.$$

Der Abnahme des Momentes entsprechend wurden die vier äusseren Kopfplatten gegen die Widerlager hin weggelassen, wie es aus der Figur 1, welche den Träger im Massstab 1 : 50 darstellt, zu ersehen ist.

In der Figur 2 ist der Querschnitt des Balkens im Massstab 1 : 10 gezeichnet und in den Figuren 3 und 4 nach bekannten Regeln das Trägheitsmoment desselben für 1, 2 und 3 Kopfplatten bestimmt worden. Als Constanten wählten wir $a = 3\ cm$, $b = 33^1/_3\ cm$ und $c = 33\ cm$; der Symmetrie wegen wurde diese Construction auf die Hälfte der Figur beschränkt. Die Figur 3

enthält das erste Kräftepolygon mit dem Pole O_1 und die Figur 4 die beiden (halben) Seilpolygone. Aus dem zweiten (unteren) wird die Strecke t gewonnen, welche, mit $a\,b\,c$ multiplicirt, das Trägheitsmoment darstellt; da andrerseits der Flächeninhalt gleich $a\,r$ ist, so findet man den Trägheitsradius i gleich $\sqrt{\frac{b\,c\,t}{r}}$. Um diesen zu construiren, wurden zunächst in der Figur 3 die drei verschiedenen $\frac{1}{2}\,t$ auf den Endstrahl des Kräftepolygons übertragen und hierauf durch Ziehen von Parallelen die Werte $\frac{c\,t}{r}$ bestimmt, wie es für das grösste der drei t angedeutet ist. Diese Werte wurden sodann an b angefügt, worauf drei Halbkreise zu den Werten i führten; letztere ergaben sich für 1, 2 und 3 Kopfplatten gleich 25,1, 26,4 und 27,5 *cm*. Ausserdem entnimmt man der Zeichnung das Widerstandsmoment in der Balkenmitte (wo $c = e$ ist) $a\,b\,t = 3\,.\,33^1/_3\,.\,70{,}4 = 7040\ cm^3$, ein Zahlenwert, der natürlich grösser sein muss als der oben berechnete, weil wir dort die Nietlöcher in Abzug gebracht haben.

Dieselbe Stellung der Lokomotive, welche das grösste Biegungsmoment ergeben hatte und die auf der Tafel 6_1 durch Pfeile verdeutlicht ist, wurde nun auch der Construction der elastischen Linie zu Grunde gelegt. Die Momentenkurve wurde mit einem Horizontalschub $H = 25\ t$ gezeichnet, und zwar aus Bequemlichkeitsgründen so, dass die Schlusslinie mit der Balkenaxe zusammenfiel. Das zugehörige Kräftepolygon stellt die Figur 6 dar.

Der Teilung des Balkens in Elemente dienten die vier Lastlinien und die vier Stellen, wo der Querschnitt sich ändert, als Anhaltspunkte, so dass neun Elemente entstanden, für welche je die äussere Kraft und der Querschnitt constant bleiben.

Für die neun Elemente wurden hierauf die Halbaxen der Elasticitätsellipsen gezeichnet.

Die verticalen Halbaxen dieser Ellipsen sind einfach gleich den in der Figur 3 bestimmten i. Um die horizontalen Axen zu finden, wurden vorerst in der Figur 5 die Strecken K ermittelt, und zwar nach dem auf der Seite 148 angegebenen Verfahren. Von der Verticalen III aus wurden für den vollen Querschnitt die der Figur 4 entnommenen $\Sigma\Delta s$ aufgetragen, wodurch sich die mit $r\,b\,z$ bezeichnete Kurve ergab. Die entsprechenden Kurven für die Querschnitte mit 2 und 1 Platte brauchen nicht neu gezeichnet zu

werden; man hat einfach die verticale Axe nach II beziehungsweise I zu verschieben. Durch Multiplication der $\tau\, b\, z$ mit $\frac{a}{z}$ erhielt man sodann (wie in den Nummern 23 bis 26) die rechts von der Verticalaxe gezeichneten Kurven der $\tau\, a\, b$. (Diese sowohl wie die vorher genannten Linien sind auf die untere Hälfte beschränkt worden.)

Nun wurden die von der Kurve $\tau\, b\, z$ begrenzten Flächen in je 4 wagrechte Streifen geteilt, deren Inhalte auf eine beliebige Basis (30 *cm*) verwandelt und daraus die drei Kräftepolygone mit den Polen O_{I}, O_{II} und O_{III} gebildet. Die Polweiten wurden (vgl. S. 149) jeweilen gleich der Kräftesumme genommen. Die Angriffspunkte dieser Kräfte werden durch die Kurven $\tau\, a\, b$ gegeben. So entstanden die drei (halben) Seilpolygone I bis III, deren Abschnitte auf der verticalen Axe die Strecken K sind. An diese wurde nach oben hin die Strecke $\frac{E b}{G} = 83^1/_3$ *cm* angefügt, wonach (vgl. die Formel auf der Seite 153) drei Halbkreise zu den i', den horizontalen Halbaxen für unendlich kleine Balkenelemente führten. Endlich wurden nach Anleitung der Textfigur 59 (Seite 161) durch rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten i' und $\sqrt{\frac{1}{12}}\, s$ die horizontalen Halbaxen i_1 der Elasticitätsellipsen der neun Balkenelemente bestimmt. Für die drei ersten Elemente sind diese Dreiecke (Tafel 6_1) ausgezogen worden.

In Zahlen ausgedrückt ergeben sich die Strecken K für 3, 2 und 1 Kopfplatte beziehungsweise gleich 77,0, 62,2 und 46,8 *cm*. Die entsprechenden i sind (Fig. 3) gleich 27,5, 26,4 und 25,1 *cm*; der Wert b beträgt (Fig. 3) $33^1/_3$ *cm*. Somit ergeben sich die Coefficienten der Querverschiebung $\varkappa = \frac{b\, K}{i^2}$ gleich 3,39, 2,98 und 2,48. Auf der Seite 150 ist gezeigt worden, dass diese Coefficienten annähernd gleich dem Gesamtquerschnitt dividirt durch den Stegquerschnitt sind. Hiernach bekäme man 4,22, 3,50 und 2,78, also nicht unwesentlich höhere Zahlen. Man ersieht hieraus, dass diese angenäherte Berechnung namentlich bei mehreren Platten unzuverlässig wird.

Von den neun Elasticitätsellipsen der Figur 1 braucht man zur Construction der elastischen Linie nur je die horizontale Axe; man kann daher die Bestimmung der Werte i (Fig. 3) auslassen. Wir haben jedoch der Deutlichkeit wegen vorgezogen, für die drei

ersten Elemente die ganzen Ellipsen einzuzeichnen; für die übrigen sind dagegen nur die horizontalen Halbaxen, und zwar um 90° gedreht, aufgetragen.

Um nun zur elastischen Linie zu gelangen, wurden die neun Teile der Momentenfläche auf die Basis $a' = 250$ *cm* (im Massstab der Zeichnung somit 5 *cm*) verwandelt und die Ergebnisse dieser Verwandlung in der Figur 7 zu einem Kräftepolygon zusammengetragen; als Poldistanzen wurden die Strecken t der Figur 2 verwendet, welche, wie es sein muss, dem Trägheitsmoment des Querschnittes proportional sind. Der Verschiedenheit der Massstäbe entsprechend, sind diese Längen in der Figur 7 als $5\,t$ bezeichnet. Das Verzerrungsverhältnis berechnet sich nun (s. Seite 164)

$$\varepsilon = \frac{J.E}{H.a'.h} = \frac{a.b.c.t.E}{H.a'.5t} = \frac{a.b.c.E}{H.a'.5} = \frac{3.33\frac{1}{3}.33.2000}{25.250.5} = 211.$$

Da der Massstab der Zeichnung gleich 1 : 50 ist, so hat man die der Tafel entnommenen Ordinaten der elastischen Linie durch 4,22 zu dividiren, um die wirklichen Einsenkungen zu bekommen.

Um die elastische Linie zeichnen zu können, mussten wir ferner die Antipole der äusseren Kräfte hinsichtlich der Elasticitätsellipsen bestimmen; zu diesem Zwecke wurden die Seiten der Momentenkurve mit der Schlusslinie zum Schnitt gebracht, die horizontalen Halbaxen der Ellipsen um 90° gedreht, ihre Endpunkte mit diesen Schnittpunkten verbunden und auf die Verbindungslinien Senkrechte gezogen. Diese einfache Construction haben wir für das 2te und 7te Element ausgezogen. Für die Elemente 4 und 5 fielen hierbei die Schnittpunkte mit der Schlusslinie über den Blattrand hinaus; wir bedienten uns daher des Satzes, dass die drei Höhenperpendikel eines Dreieckes sich in einem Punkte schneiden. Betrachtet man nämlich die Verticale durch den Schwerpunkt des Elementes, die betreffende Seilpolygonseite und die zu ziehende Verbindungslinie als die Seiten eines Dreieckes, so bildet die Balkenaxe das eine Perpendikel und das Lot auf die Seilpolygonseite das zweite; durch den Schnitt dieser beiden geht das dritte Perpendikel und zu diesem läuft die Linie parallel, welche den Antipol auf der Balkenaxe abschneidet. Für das Element 4 ist diese ebenso bequeme als genaue Hülfsconstruction durch punktirte Linien angedeutet.

Hiermit war nun alles Nötige vorbereitet und es konnte zur Construction des zweiten Seilpolygons AB in der Figur 1 geschritten werden, worüber nichts Wesentliches zu bemerken ist.

Streng genommen bilden die Seiten dieses Polygons nicht, wie es vermutet werden könnte, die Tangenten an die elastische Linie, sondern bestimmen bloss durch ihre Schnitte mit den Grenzlinien der Balkenelemente Punkte, durch welche die elastische Linie geht. Doch ist der Fehler, den man begeht, wenn man in das Polygon eine Kurve zeichnet, sehr gering. Wir haben sogar dieses unterlassen, da die Kurve sich mit dem Polygon beinahe gedeckt hätte.

Die grösste Einsenkung tritt genau in der Mitte ein und beträgt $23{,}9 : 4{,}22 = 5{,}7$ *mm*.

Vernachlässigt man den Einfluss der Transversalspannungen, mit anderen Worten, setzt man den Gleitmodul $G = \infty$, so fallen die Antipole der äusseren Kräfte sämtlich mit den Schwerpunkten der Balkenelemente zusammen; da die Kräfte sich hierbei von der Balkenmitte entfernen, so erhält man in diesem Falle stets kleinere Einsenkungen.

Wir haben auch hierfür die elastische Linie (gestricht) gezeichnet; ihre grösste Entfernung von der Horizontalen beträgt (unter Berücksichtigung der Verzerrung) 5,0 *mm*, also nur 88 % von dem wahren Werte.

Je höher der Balken im Verhältnis zur Spannweite ist, desto breiter werden die Elasticitätsellipsen, desto grösser wird demnach der Fehler, den man bei Vernachlässigung der Scherspannungen begeht. In unserem Beispiele verhält sich die Höhe zur Spannweite etwa wie 1 : 12; meistens wird in der Praxis ein kleineres Verhältnis gewählt; der Einfluss der scherenden Spannungen darf alsdann um so weniger vernachlässigt werden, wenn man auch nur annähernd richtige Resultate zu erzielen wünscht.

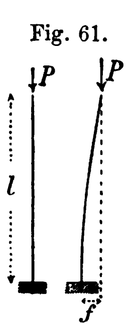
37. Die Knickfestigkeit langer Druckstäbe.

Wenn die Länge eines in seiner Längsrichtung auf Druck beanspruchten Stabes eine gewisse Grenze übersteigt, so verlieren bekanntlich die gewöhnlichen Formeln für die Druckfestigkeit ihre Gültigkeit. Die von der äusseren Kraft erzeugten Druckspannungen sind alsdann bezüglich der Tragfähigkeit nicht mehr, oder doch nicht mehr ausschliesslich massgebend; sondern der Stab erfährt zunächst eine seitliche Ausbiegung, wodurch die Querschnitte gegenüber den Angriffspunkten der Längskraft verschoben werden und

mehr oder weniger grosse Biegungsspannungen erfahren. Alle unsere im zweiten und dritten Kapitel angestellten Betrachtungen und Entwickelungen gelten nur, so lange die elastischen Formänderungen die Lage der Angriffspunkte nur in verschwindendem Masse ändern. Diese Bedingung wird in den üblichen Fällen der Beanspruchung auf Zug und Biegung erfüllt, bei langen, auf Druck in Anspruch genommenen Stäben dagegen nicht mehr. Diese letzteren bilden daher einen Ausnahmefall und erfordern in der Festigkeitslehre eine ganz gesonderte, auf Grund der Elasticitätsgesetze beruhende Untersuchung.

In Nachfolgendem haben wir versucht, dieser Aufgabe etwas näher zu treten. Wenn auch unsere Betrachtungen nichts wesentlich Neues bieten, so hielten wir es doch der Vollständigkeit halber für nötig, auch diesen Gegenstand so viel, als es zur Zeit möglich ist, in den Bereich der graphischen Methoden zu ziehen. Letztere gestatten überdies, einzelne einschlägige Fragen leichter zu beantworten, als es der Rechnung gelingt.

Fig. 61.



Denken wir uns (Fig. 61) einen geradlinigen Stab, der an dem einen Ende eingespannt ist und am andern von einer in der Richtung der Axe wirkenden Kraft P angegriffen wird, so wird der Stab, so lange die Kraft eine gewisse Grösse nicht überschreitet, seine Form beibehalten und nur in seiner Längsrichtung sich etwas verkürzen. Bei zunehmender Intensität der Kraft tritt jedoch nach einiger Zeit eine Krümmung der Axe ein, wodurch in den Querschnitten neben Druckspannungen auch Biegungsspannungen entstehen. Die Stärke der Krümmung hängt von dem Biegungsmomente ab, und zwar bleibt (nach Nr. 30) der Krümmungshalbmesser ϱ anfänglich dem Biegungsmomente umgekehrt proportional; es ist $M . \varrho = J . E.$ Nimmt aber die Krümmung mehr und mehr zu, so tritt ein Zeitpunkt ein, wo die grösste der vorhandenen Spannungen die Elasticitätsgrenze überschreitet; von da an wachsen die elastischen Formänderungen rascher als die Spannungen (vgl. Fig. 49, Seite 135); der Krümmungsradius ist nun nicht mehr dem Biegungsmomente umgekehrt proportional, sondern vermindert sich, zuerst in der Nähe der Einspannung, dann auch weiter davon entfernt, rascher als das Moment zunimmt.

Die Last, welche der Stab tragen kann, bleibt hierbei bis zur

Erreichung der Elasticitätsgrenze nahezu constant; jetzt aber verringert sie sich, während die Biegung langsam fortschreitet, bis endlich die Festigkeitsgrenze überschritten wird und der Stab bricht. Ist jedoch die Belastung des Stabes derart beschaffen, dass sie nach Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze nicht von selbst kleiner wird, besteht sie zum Beispiel aus aufgelegten Gewichten, so tritt naturgemäss ein plötzlicher Bruch, ein Zusammenknicken ein, sobald der Punkt erreicht ist, von welchem aus die Kraft bei zunehmender Ausbiegung abnehmen sollte.

Ganz die nämlichen Betrachtungen können auch bei Stäben angestellt werden, welche an beiden Enden von zwei gleichen, einander entgegengesetzt gerichteten Kräften gefasst werden, sowie bei Stäben, die sich an ihren Enden infolge Einspannung oder flacher Auflagerung nicht drehen können (Figur 62). Im ersteren Fall kann man den Stab als aus zwei Stäben von der Form der Figur 61 zusammengesetzt denken; im zweiten Fall lässt er sich in vier Stäbe von jener Form zerlegen.

Fig. 62.

l

Nach dem in der vorletzten Nummer (Seite 162) besprochenen Constructionsverfahren kann nun die Form und Tragfähigkeit eines nach der Figur 61 gebogenen Stabes graphisch folgendermassen bestimmt werden.

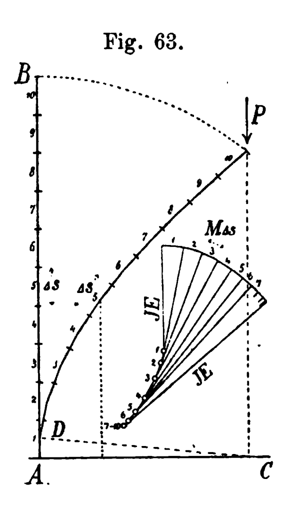
Man teilt den Balken in kleine Elemente von der Länge Δs ein, trägt die Produkte $M \,.\, \Delta s$, in welchen M das Biegungsmoment bedeutet, als Kräfte, die Produkte $J \,.\, E$, worin J das Trägheitsmoment des Querschnittes und E den Elasticitätsmodul darstellt, als Poldistanzen auf und zeichnet hierzu ein Seilpolygon. Dabei sind die Kräfte im Kräftepolygon stets senkrecht zu den Strahlen aufzutragen, und es ist wohl zu beachten, dass hier, wo es sich um stärkere Krümmungen handelt, von dieser Bedingung nicht abgewichen werden darf.

Im Einzelnen ist der Gang der Construction der folgende:

In beliebiger Entfernung von dem gegebenen geraden Stabe AB wird zuerst (Fig. 63) eine verticale Linie als Richtungslinie der Kraft P gezogen. Da die Grösse der Kraft, welche den Stab bis zu dieser Grenze ausbiegt, von vornherein nicht angegeben werden kann, so muss sie vorläufig geschätzt werden. Hierauf wird mit dem Radius JE ein kleiner Kreisbogen gezeichnet und auf diesem der Wert $M \,.\, \Delta s$ für das erste Element aufgetragen.

Dann erhält man den Verbiegungswinkel für dieses Element und kann durch dessen Mitte eine Parallele zum zweiten Strahle des Kräftepolygons ziehen. Nun wird das Moment für die Mitte des zweiten Elementes bestimmt und der entsprechende Wert $M.\Delta s$ wiederum im Kräftepolygon aufgetragen. So fortfahrend kann man die ganze elastische Linie Schritt für Schritt zeichnen.

Fig. 63.



Werden die Δs gleich lang gewählt, so sind die $M.\Delta s$ der Entfernung der Elemente von der Kraft P proportional und können vertical unter der Mitte jedes Elementes als Abschnitt zweier Geraden CA und CD abgegriffen werden.

Man gelangt auf diesem Wege zu einem Polygone, in welches sich schliesslich eine Kurve einzeichnen lässt. Streng genommen sollte man freilich nicht die Ecken dieses Polygons als die Mittelpunkte der Balkenelemente betrachten, sondern diese Elemente als kleine Kurvenstücke einzeichnen, deren Schwerpunkte bestimmen und die Abstände dieser Punkte von der Kraft als Hebelarme abgreifen. Es lässt sich diese Correctur, wenn es gewünscht wird, leicht nachträglich anbringen, hätte jedoch, wenn in so kleinem Massstabe wie bei der Figur 63 gezeichnet wird, keinen Wert.

Da die Grösse von P, welche der angenommenen Kraftlinie entspricht, nur annähernd angenommen werden kann, so wird der Endpunkt der elastischen Linie nicht genau in die Kraftrichtung fallen; jenachdem nun das Ende des 10ten Elementes rechts oder links von der angenommenen Verticalen zu liegen kommt, muss man P verkleinern oder vergrössern. Durch mehrmaliges Probiren oder noch besser durch eine Art Regula falsi gelangt man jedoch bald zur richtigen Grösse.

So lange nun die Elasticitätsgrenze des Materials nicht überschritten wird, bleibt der Elasticitätsmodul E constant, und wenn der Stab zugleich auf seiner ganzen Länge gleichen Querschnitt hat, so erhält man ein Kräftepolygon mit constanter Polweite, oder was dasselbe ist, die $M.\Delta s$ liegen alle auf dem nämlichen Kreise. Bei den in der Praxis vorkommenden Fällen (selbst bei sehr schlanken Stäben) wird jedoch die Grenze, innerhalb welcher Spannung und

Ausdehnung einander proportional sind, sehr bald, das heisst schon bei einer verhältnismässig geringen Ausbiegung überschritten. Von da an dehnen sich einzelne Teilchen des Balkens rascher aus, als es bei gleichförmiger Elasticität der Fall wäre; man hat daher, um für jedes Balkenelement den Winkel $\Delta\delta$ zu construiren, für die Polweite JE einen kleineren Wert einzuführen.

Um nun für jedes Biegungsmoment die entsprechende Poldistanz zu finden, muss man das auf der Tafel 2 (untere Hälfte) dargestellte Verfahren anwenden, das heisst, man hat das Spannungsdiagramm (Textfigur 49) mit der Querschnittsfigur in Beziehung zu bringen und für verschiedene Stellungen desselben das Biegungsmoment zu ermitteln. Der hierzu einzuschlagende Weg ist auf den Seiten 135—137 beschrieben worden; indessen lässt er sich dadurch noch etwas vereinfachen, dass man im ersten Seilpolygon die Kräfte Δr horizontal an den Hebelarmen y und im zweiten die Abschnitte Δs des ersten Polygons vertical an den Hebelarmen σ wirken lässt; denn dann braucht das erste Seilpolygon nur ein einziges Mal gezeichnet zu werden. Bedeutet a die Verwandlungsbasis für die Flächeninhalte, b die erste und c die zweite Poldistanz, und schneiden die äussersten Seiten des zweiten Seilpolygons die Strecke μ ab, so ist das entsprechende Biegungsmoment $M = abc\mu$.

Nennt man dann den Winkel, den das Diagramm in seinem Ursprung mit der verticalen Axe des Profils einschliesst, α, so besteht, so lange die Elasticitätsgrenze nicht überschritten ist, die Beziehung $\sigma = y \,.\, tang\, \alpha$, und man findet hieraus $M = \Sigma \sigma \,.\, \Delta F \,.\, y = \Sigma \Delta F \,.\, y^2 \,.\, tang\, \alpha = J \,.\, tang\, \alpha = abct \,.\, tang\, \alpha$, oder $\mu = t \,.\, tang\, \alpha$. Fallen aber einzelne σ in den gebogenen Teil des Diagrammes, so wird μ kleiner als $t \,.\, tang\, \alpha$. In demselben Verhältnisse, als μ gegenüber $t \,.\, tang\, \alpha$ abnimmt, muss aber auch bei der Construction der elastischen Linie der Wert JE verkleinert werden.

Diese Schlussfolgerungen sind freilich nur unter der Voraussetzung ganz richtig, dass auch nach Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze der ursprünglich ebene Querschnitt eben bleibe, und dass das aus Zugversuchen gewonnene Spannungsdiagramm auch bei Biegungsbeanspruchungen gelte. Doch dürfte der aus diesen noch unerwiesenen Voraussetzungen entspringende Fehler kaum gross ausfallen.

Auf Grund dieser Betrachtungen haben wir für einen Rundeisenstab von 2 *cm* Durchmesser und 500 *cm* Länge eine Reihe von

elastischen Linien gezeichnet und für verschieden grosse Ausbiegungen die entsprechenden Kräfte P bestimmt. Die Textfigur 63 stellt daraus einen einzelnen Fall dar; in den Elementen 7 bis 10 bleibt die grösste der im Querschnitte auftretenden Spannungen noch innerhalb der Elasticitätsgrenze; in den vorhergehenden Elementen wird dagegen diese Grenze überschritten. Das Kräftepolygon hat daher einen veränderlichen Pol; man könnte indessen ebenso gut den Pol festhalten und die Kräfte treppenförmig aneinander reihen.

Die übrigen Fälle der ganzen Reihe darzustellen, scheint uns überflüssig, da sich stets ähnliche Figuren ergeben. Dagegen sei bemerkt, dass sich unsere im Anfang dieser Nummer ausgesprochenen Beziehungen zwischen Kraft und Ausbiegung durchaus bestätigten.

Zunächst geht aus den Constructionen hervor, dass die Tragkraft eines Stabes bei wachsender Ausbiegung anfänglich langsam wächst, aber nur sehr wenig. Denn schon bei einer kleinen Ausbiegung wird, trotzdem der Stab absichtlich sehr schlank gewählt wurde, die Elasticitätsgrenze erreicht; von da an aber nimmt die Tragkraft fortwährend ab.

Ferner zeigen die durchgeführten Constructionen, dass die Kraft P einen ganz bestimmten, von null verschiedenen Wert annimmt, wenn man die Ausbiegung auf Null zurückgehen lässt. Dieser Anfangswert der Kraft ist nahezu so gross wie die grösste Kraft, welche der Balken tragen kann. Es lässt sich hiernach begreifen, dass belastete Stäbe plötzlich zusammenknicken, wenn nicht die Belastungsverhältnisse derart liegen, dass mit beginnendem Ausbiegen zugleich die Grösse der Last sich vermindert.

In der Praxis wird denn auch vielfach diejenige Kraft, bei welcher eine seitliche Ausbiegung erst beginnen will, als Tragkraft bezeichnet und mit einem entsprechenden Sicherheitscoefficienten zur Berechnung der Dimensionen benützt.

Eine Formel zur Berechnung dieser Kraft lässt sich durch folgende Betrachtung ableiten:

Wir denken uns, es sei eine Ausbiegung eingetreten, jedoch eine so geringe, dass man die Länge eines Balkenelementes Δs mit der Länge seiner Projection auf eine Verticale vertauschen darf.

Schneidet man nun (Fig. 64) einen liegenden Kreiscylinder vom Radius r durch zwei verticale Ebenen, von welchen die eine zur Axe senkrecht steht, während die andere um einen kleinen Winkel α davon abweicht, und wählt zwei auf derselben Mantellinie gelegene

Punkte beider Schnittkurven, nennt deren Entfernung y und den von den entsprechenden Tangenten eingeschlossenen Winkel δ, so ist, da diese beiden Grössen verschwindend klein gedacht werden, $\delta = \frac{y}{t}$, oder da $y = r \,.\, cos\, \beta \,.\, tang\, \alpha$ und $t = r \,.\, cot\, \beta$ ist, $\delta = sin\, \beta \,.\, tang\, \alpha$. Durch Differenziren nach β erhält man

$$\varDelta\, \delta = cos\, \beta \,.\, tang\, \alpha \,.\, \varDelta\, \beta = \frac{y \,.\, \varDelta\, \beta}{r}.$$

Setzt man nun für $r \,.\, \varDelta\, \beta$ die Länge $\varDelta\, s$, so folgt

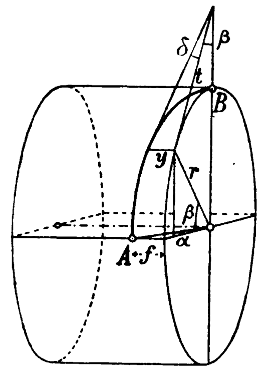
$$\varDelta\, \delta = \frac{y \,.\, \varDelta\, s}{r^2}.$$

Nun ist der Drehungswinkel zweier benachbarter Querschnitte bei einem auf Knicken beanspruchten Balken

$$\varDelta\, \delta = \frac{P \,.\, y \,.\, \varDelta\, s}{J \,.\, E},$$

wenn y die Entfernung des Balkenelementes von der Kraftrichtung bedeutet. Aus der Gleichartigkeit der beiden letzten Ausdrücke folgt, dass die Abwickelung der Kurve AB die elastische Linie eines geknickten Stabes liefert, letztere daher eine Sinuskurve ist. Ferner folgt durch Gleichsetzung beider Werte von $\varDelta\, \delta$

Fig. 64.



$$\frac{1}{r^2} = \frac{P}{J \,.\, E};$$

da aber die Länge des Stabes $l = \frac{1}{2} \pi\, r$ ist, so ergibt sich die Tragkraft

$$P = \frac{\pi^2 \,.\, J \,.\, E}{4\, l^2}.$$

Ist der Stab an beiden Enden drehbar, so kann man ihn als aus zwei eingespannten Stäben zusammengesetzt denken; nennt man in diesem Falle die Länge wieder l, so findet man die theoretische Tragkraft

$$P = \frac{\pi^2 \,.\, J \,.\, E}{l^2}.$$

Ist endlich der Stab an beiden Enden eingespannt, so dass er eine doppelte Krümmung annimmt, so haben wir vier einzelne Stäbe zu unterscheiden, und es wird infolge dessen die Tragkraft

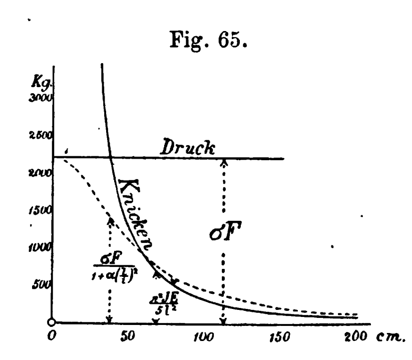
$$P = \frac{4\, \pi^2 \,.\, J \,.\, E}{l^2}.$$

In der praktischen Anwendung dieser Formeln wird dem Nenner stets noch ein Sicherheitsfactor (bei Eisen etwa 5, bei Holz etwa 10) beigefügt.

An diesen Formeln muss nun besonders das Fehlen jeglicher zulässigen Spannung, sowie ihre gänzliche Verschiedenheit von der für die Druckfestigkeit kurzer Stäbe gültigen Formel auffallen. Diese Sonderbarkeiten rühren offenbar davon her, dass die Knickgefahr eine ganz eigentümliche ist, indem sie sich erst infolge von elastischen Formänderungen einstellt, während bei kurzen, auf Druck beanspruchten Stäben, sowie bei Zug- und Biegungsfällen die elastischen Bewegungen keinen oder nur einen verschwindenden Einfluss auf die Tragfähigkeit ausüben.

Nach unseren bisherigen Resultaten besitzen wir nun für die Tragkraft eines in seiner Längsrichtung gepressten Balkens zwei ganz ungleichartige Formeln; nach der einen ist die Kraft von der Länge des Balkens unabhängig; nach der andern nimmt sie im umgekehrten Verhältnisse zum Quadrate der Länge ab. Trägt man die Länge des Stabes als Abscisse und die Kraft als Ordinate auf (Figur 65), so führt die eine Formel zu einer horizontalen Geraden, die andere zu einer Kurve, die sich beiden Coordinatenaxen asymptotisch anschmiegt. Es ist klar, dass von den beiden, einer gegebenen Länge entsprechenden Kräften in der praktischen Anwendung stets die kleinere zu wählen ist. Da jedoch der plötzliche Uebergang von der Gefahr des Zerdrücktwerdens in die Gefahr des Zusammenknickens dem Wesen unserer baustatischen Theorien sowie auch meistens der Erfahrung widerspricht, so hat man sich auf künstlichem Wege eine einheitliche Formel und damit einen glatten Uebergang zu verschaffen gewusst. Diese Formel, die zwischen den beiden getrennt liegenden Fällen einen Compromiss herstellt, lautet:

Fig. 65.



$$P = \frac{\sigma F}{1 + \alpha \left(\frac{l}{i}\right)^2}.$$

Darin bedeutet σ die zulässige Druckspannung in gewöhnlichem

Sinne, F den Flächeninhalt des Querschnittes, l die Stablänge, i den (kleinsten) Trägheitsradius des Querschnitts und α einen Erfahrungscoefficienten. Es ist leicht zu sehen, dass diese Formel für sehr kurze Stäbe in die Formel für gewöhnliche Druckfestigkeit, für sehr lange in diejenige für Knickfestigkeit übergeht. Für den Fall, dass beide Enden des Stabes drehbar sind, setzt man bei Schmiedeeisen gewöhnlich $\alpha = 0{,}0001$.

Zum Vergleich haben wir in der Figur 65 auch diese Formel durch eine gestrichte Kurve dargestellt. Die zulässige Spannung σ ist dabei gleich 700 *kg* gesetzt und als Querschnitt ein Kreis von 2 *cm* Durchmesser gewählt worden. Man sieht, dass die neue Kurve in der That zwischen den beiden andern zu vermitteln sucht; sie lässt aber zugleich erkennen, dass wir uns hinsichtlich der in der Praxis zu berechnenden Tragfähigkeit gedrückter Stäbe immer noch in verhältnismässig grosser Ungewissheit befinden.

Die Unsicherheit, welche bei der Untersuchung der Knickfestigkeit den theoretischen Ergebnissen noch anklebt, hat naturgemäss zu dem Wunsche geführt, die Frage durch Experimente zu lösen. So zahlreich indessen die angestellten Versuche auch sind, so haben sie doch noch nicht in erwünschtem Masse zur Klarstellung der Verhältnisse beigetragen. Die Tragfähigkeit der auf Knicken beanspruchten Balken, sowie die Ausbiegungen, welche diese in verschiedenen Zeitpunkten des Experimentes annehmen, hängen offenbar in so hohem Masse von schwer nachweisbaren Nebenumständen ab, dass die Aufgabe, die man zu lösen wünscht, eher verwickelter geworden ist. Drehbare Endpunkte, wie sie bei der theoretischen Berechnung vorausgesetzt werden, sind wegen der unvermeidlichen Reibungswiderstände praktisch nicht leicht herstellbar, und abgeflachte Endpunkte, welche einer Einspannung gleichkommen, lassen sich hinwieder nur schwierig genau genug anarbeiten. So kommt es, dass in dem einen wie in dem anderen Falle der dem Versuchskörper auferlegte Druck stets mehr oder weniger excentrisch wirkt, wodurch die Tragkraft und die Ausbiegungserscheinungen ganz bedeutend geändert werden. Jedenfalls ist es in erster Linie dieser Excentricität der Kraft zuzuschreiben, wenn sich bei solchen Knickversuchen, im Widerspruch mit obigen theoretischen Ergebnissen, die Ausbiegung annähernd proportional der Kraft herausgestellt hat. Die neueren Versuche von Bauschinger und Tetmajer, bei denen auf genaue Lage des Angriffspunktes der Kraft besondere Sorgfalt verwendet

wurde, lassen erkennen, dass die Formeln der Seite 176 unter solchen Umständen durch den Versuch bestätigt werden.

Es sind auch mehrere Anläufe gemacht worden, die Frage der Knickfestigkeit auf anderen Wegen einer theoretischen Lösung entgegenzuführen; einen allseitig befriedigenden Erfolg haben diese Studien indessen bis dahin nicht erzielt. Uebrigens haben dieselben für die Praxis auch nicht den Wert, den man ihnen zuzuschreiben geneigt ist; denn so lange es uns nicht gelingt, unsere Bauconstructionen derart auszuführen, dass die in den Druckstäben herrschenden Kräfte genau centrisch wirken, wird jede Formel der Wirklichkeit nur angenähert entsprechen, und die stets vorhandene Unsicherheit kann daher nicht anders als durch einen genügend hohen Sicherheitscoefficienten gedeckt werden.

38. Die Festigkeit des Materiales.

Der Widerstand, welchen ein Baustoff der Trennung seiner Teilchen, das heisst der Aufhebung ihrer Cohäsion entgegenstellt, nennt man seine Festigkeit. Gewöhnlich unterscheidet man Zug-, Druck- und Scherfestigkeit und hat die Grösse dieser Kräfte für die üblichen Baumaterialien durch zahlreiche Experimente festgegestellt. Trotz des grossen Umfanges dieser Versuche bleibt jedoch immer noch manches zu wünschen übrig. So wissen wir unter anderem noch nichts Sicheres über den Widerstand des Materiales gegen *schief* gerichtete Kräfte, obgleich dieser Fall in der Wirklichkeit wohl ebenso häufig vorkommt, wie der einfachere. Gewöhnlich erlaubt man sich, die schief gerichtete Spannung in eine normale und eine transversale Seitenkraft zu zerlegen und die Festigkeit des Materiales in jeder der beiden Richtungen besonders zu prüfen, obschon man hiezu keine deutliche Berechtigung hat, sondern eher vermuten muss, dass eine Vereinigung von Zug und Schub dem Baustoffe schädlicher sei als, bei gleicher Grösse der Kräfte, Zug oder Schub allein, während umgekehrt ein mit dem Schube verbundener Druck, dem Gefühle nach, in günstigem Sinne wirkt. Ob in letzterem Falle etwas wie Reibung als wirksamer Factor sich geltend macht, ist noch nicht aufgeklärt. Ebenso ist es zur Zeit noch fraglich, ob Druckspannungen an und für sich allein ein Material zu zerstören im Stande sind, oder ob nicht vielmehr die von

äusseren Druckkräften bewirkten Risse im Grunde genommen den dabei auftretenden Scherspannungen zuzuschreiben sind.

Die vorhandenen Lücken machen sich übrigens deshalb weniger fühlbar, weil, wie gezeigt worden ist, die grössten normalen Spannungen fast niemals mit transversalen verbunden auftreten.

Leistet nun ein Material allen Arten von Kräften in gleichmässiger Weise Widerstand, wie dies annähernd bei den verschiedenen Sorten von Eisen und Stahl der Fall ist, so braucht man daher nur zu untersuchen, ob es dem Maximal-Zug oder -Druck widersteht, welcher durch die grösste Halbaxe der Spannungsellipse beziehungsweise des Spannungsellipsoides gegeben wird. Kann dagegen das Material dem Drucke besser als dem Zuge widerstehen (Gusseisen) oder umgekehrt (Steine und Mörtel), und haben die Hauptspannungen ungleiches Zeichen, so muss man sowohl die Druck- als die Zugspannung auf ihre Zulässigkeit prüfen. Auch kann es in diesem Falle nötig werden, auf die Schubfestigkeit des Stoffes Rücksicht zu nehmen.

Eine eingehendere Rücksichtnahme erfordern jedoch die transversalen Kräfte, wenn es eine bestimmte Richtung im Material gibt, nach der es den scherenden Kräften nur geringen Widerstand entgegen zu setzen vermag, wie dies zum Beispiel beim Holz in der Spaltrichtung (in geringerem Masse auch beim Eisen in der Walzrichtung) der Fall ist. Für irgend einen Punkt bilden die Spaltebenen einen Büschel, dessen Axe mit der Faserrichtung zusammenfällt. Bestimmt man nun im Polarsystem der Schnitte und Kräfte (Nr. 8) die dieser Axe conjugirte Ebene, so enthält diese die Richtungen sämtlicher auf die Spaltebenen wirkenden Kräfte; diese liegen zu dem Ebenenbüschel involutorisch und ihre Grösse wird durch die Ellipse bestimmt, in welcher die conjugirte Ebene das Spannungsellipsoid schneidet. Diese Kräfte wirken im Allgemeinen schief auf die betreffenden Spaltebenen. Unter der Annahme, dass nur die transversale Seitenkraft massgebend sei, hat man daher die Kräfte je normal und parallel zur Spaltebene zu zerlegen und unter den parallelen Componenten die grösste herauszusuchen. Unter allen diesen transversal wirkenden Spannungen fallen im Allgemeinen nur zwei mit der Faserrichtung selbst zusammen; sie werden durch das rechtwinklige Paar der Ebeneninvolution bestimmt, welche die Spaltebenen mit den durch die Spaltaxe und die Kräfte gelegten Ebenen bilden. Unter den Spaltebenen gibt es ferner eine einzige, welche bloss von einer normalen Kraft beansprucht wird.

Will man auch noch einen Unterschied zwischen der Schubfestigkeit in den verschiedenen Richtungen einer Spaltfläche machen, zum Beispiel beim Holz die Festigkeit in der Faserrichtung kleiner annehmen als quer dazu, so hätte man erst das Gesetz aufzustellen, nach welchem sich die Widerstandsfähigkeit des Materials nach den verschiedenen Richtungen ändert, und hierauf zu untersuchen, in welcher Richtung das Verhältnis der Festigkeit zur Transversalspannung ein Minimum wird.

So viel uns bekannt, ist man auf solche Untersuchungen noch nie eingetreten; sie wären auch sehr verwickelt, noch umständlicher als die in der Nummer 9 beschriebene Construction des Spannungsellipsoides. Man begnügt sich daher in der Praxis mit der Untersuchung derjenigen Fälle, bei welchen alle Constructionen in der Ebene ausgeführt werden können. Dann ist unter den Spaltebenen eines Punktes nur eine einzige massgebend; sie wird in der Constructionsebene durch die Faserrichtung gekennzeichnet; die ganze Untersuchung beschränkt sich somit darauf, die Spannung, welche auf eine gegebene Schnittrichtung wirkt, zu bestimmen und normal und parallel zu dieser Richtung zu zerlegen.

Wir haben bei diesen Betrachtungen hauptsächlich B a u materialien im Auge gehabt. Eine eigentümliche Stellung nehmen neben diesen die lockeren oder halbflüssigen Materialien ein, mit denen man sich in der Erddrucktheorie zu befassen hat. Wir ziehen indessen vor, die bei diesen Stoffen auftretenden neuen Gesichtspunkte erst im III. Teile näher auseinander zu setzen.

Eine weitere, noch nicht völlig aufgeklärte Frage ist die, ob die Festigkeit des Materials in einem gegebenen Flächenelemente nur von der auf letzteres einwirkenden Spannung abhängig ist, oder ob nicht vielmehr die auf anders gerichtete Schnittflächen wirkenden Spannungen ebenfalls zu berücksichtigen sind. Leider geben uns die bisher ausgeführten Festigkeitsversuche keine Anhaltspunkte zur Beantwortung der Frage, wie sich ein Würfel verhält, der gleichzeitig in zwei aufeinander senkrechten Richtungen von Kräften beansprucht wird. Die darauf hinzielenden Versuche scheitern leider an technischen Schwierigkeiten, die bis dahin nicht überwunden werden konnten.

Und doch sollten wir zur vollständigen Beurteilung der Festigkeit unserer tragenden Balken im Stande sein, obige Frage zu beantworten; denn die in dem vorhergehenden Kapitel behandelten

Aufgaben zeigen uns, dass im Allgemeinen die von den Zug- und Druckkurven begrenzten Elemente stets in der einen Richtung auf Zug, in der anderen auf Druck in Anspruch genommen werden; und es ist wenigstens wahrscheinlich, dass die Festigkeitsverhältnisse in diesem Falle andere sein werden, als wenn bloss die eine der beiden Kräfte in Wirkung steht.

Die Betrachtungen über die elastischen Formänderungen, welche wir in der Nummer 30 angestellt haben, bringen uns der Lösung dieser Frage einen Schritt näher. Denn wenn wir auch den genauen Zusammenhang zwischen der Festigkeit und der Formänderung nicht sicher angeben können, so lässt sich doch vermuten, dass die Gefahr eines Bruches mit der Formänderung zunimmt, und so lange Theorie und Experiment uns nicht eines Besseren belehren, darf man (nach dem Vorgange französischer Gelehrter) annehmen, dass beide Factoren einander proportional sind.

Werden nun die sechs Seiten eines kleinen Würfels von den Spannungen σ_1, σ_2 und σ_3 angegriffen (wobei wir positive σ als Zug-, negative als Druckkräfte ansehen), so dehnt sich nach den Entwickelungen der Nummer 30 der Würfel in der Richtung von σ_1 aus um die Strecke

$$\frac{\sigma_1}{E} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{E} \cdot \frac{1}{\varepsilon},$$

worin E den Elasticitätsmodul und ε das Verhältnis der Längsausdehnung λ zur Quercontraction μ (Figur 51, Seite 141) bedeutet. Nach der Grösse dieses Ausdruckes wäre somit die Bruchgefahr in der Richtung von σ_1 zu beurteilen. Durch Vertauschen der Indices findet man die für die beiden anderen Richtungen geltenden Ausdrücke.

Bei unseren tragenden Balken ist nun die eine der drei Spannungen stets gleich null, so dass wir den Ausdruck

$$\frac{\sigma_1}{E} - \frac{\sigma_2}{E\varepsilon}$$

anzuwenden haben. Ferner ist nach früher die eine der beiden Spannungen stets positiv, die andere negativ, so dass die Bruchgefahr in der einen Richtung durch die in der anderen herrschende Spannung stets vergrössert wird.

Bezeichnen σ und τ die in einem Punkte des Querschnittes wirkenden Spannungen, so sind die in schiefen Schnitten wirkenden

grössten Normalspannungen (nach Nummer 18, Seite 80)

$$\sigma_{\max} = {}^1/_2\sigma + \sqrt{{}^1/_4\sigma^2 + \tau^2}$$

und

$$\sigma_{\min} = {}^1/_2\sigma - \sqrt{{}^1/_4\sigma^2 + \tau^2}$$

Obiger Ausdruck geht somit über in

$$\frac{(\varepsilon - 1)\,{}^1/_2\sigma + (\varepsilon + 1)\sqrt{{}^1/_4\sigma^2 + \tau^2}}{E\,\varepsilon}$$

oder für $\varepsilon = 4$ (vgl. Nr. 30) in

$$\frac{{}^3/_8\sigma + {}^5/_8\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{E}.$$

Graphisch lässt sich dieser Ausdruck, wenn die beiden Maximalspannungen bestimmt sind, einfach dadurch construiren, dass man von jeder Spannung den ε^{ten} Teil nimmt und ihn zu der andern hinzufügt. Man erhält auf diese Weise zwei neue Kurven, aus welchen zu entnehmen ist, wie hoch die Bruchgefahr an jeder Stelle des Querschnittes steigt und ob sie irgendwo die zulässige Grenze überschreitet.

Immerhin ist die hierzu nötige Arbeit etwas weitläufig, und wenn es sich bloss um die Frage handelt, ob die Bruchgefahr an irgend einer Zwischenstelle höher ist als in der obersten oder untersten Kante des Querschnittes, wo bekanntlich τ verschwindet, so führt das folgende Verfahren rasch zum Ziele.

Angenommen, die Bruchgefahr sei an jeder Stelle des Querschnittes constant, also gleich $\frac{\sigma_e}{E}$, wenn σ_e die Spannung in der äussersten Kante bezeichnet, so besteht die Beziehung

$$(\varepsilon - 1)\,{}^1/_2\sigma + (\varepsilon + 1)\sqrt{{}^1/_4\sigma^2 + \tau^2} = \varepsilon\,\sigma_e$$

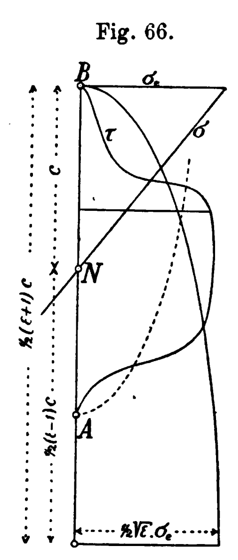
oder

$$(\varepsilon + 1)^2\left(\frac{\tau}{\sigma_e}\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{\sigma}{\sigma_e}\right)^2 + \varepsilon(\varepsilon - 1)\frac{\sigma}{\sigma_e} - \varepsilon^2 = 0.$$

Berücksichtigt man, dass die Spannung σ der Entfernung von der neutralen Axe proportional ist, so erkennt man, dass die Endpunkte derjenigen τ, welche dieser Gleichung genügen, auf einer Ellipse liegen. Nennt man (Figur 66) den Abstand der obersten Kante von der neutralen Axe c, so wird in den Abständen c und $-\varepsilon c$ das Spannungsverhältnis $\frac{\sigma}{\sigma_e}$ gleich 1 beziehungsweise gleich $-\varepsilon$ und hiernach in beiden Fällen die Spannung τ gleich null; der Mittelpunkt der Ellipse hat daher den Abstand $-{}^1/_2(\varepsilon - 1)\,c$ und ihre

horizontale Halbaxe beträgt, wie sich aus obiger Gleichung leicht ableiten lässt, $\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\,\sigma_e$. Eine zweite solche Kurve entsteht, wenn man statt von der oberen Kante von der unteren ausgeht; ihr Scheitelpunkt liegt in A und ihr Mittelpunkt um $\frac{1}{2}(\varepsilon - 1)\,AN$ oberhalb N; in der nebenstehenden Figur ist auch diese Kurve punktirt angedeutet.

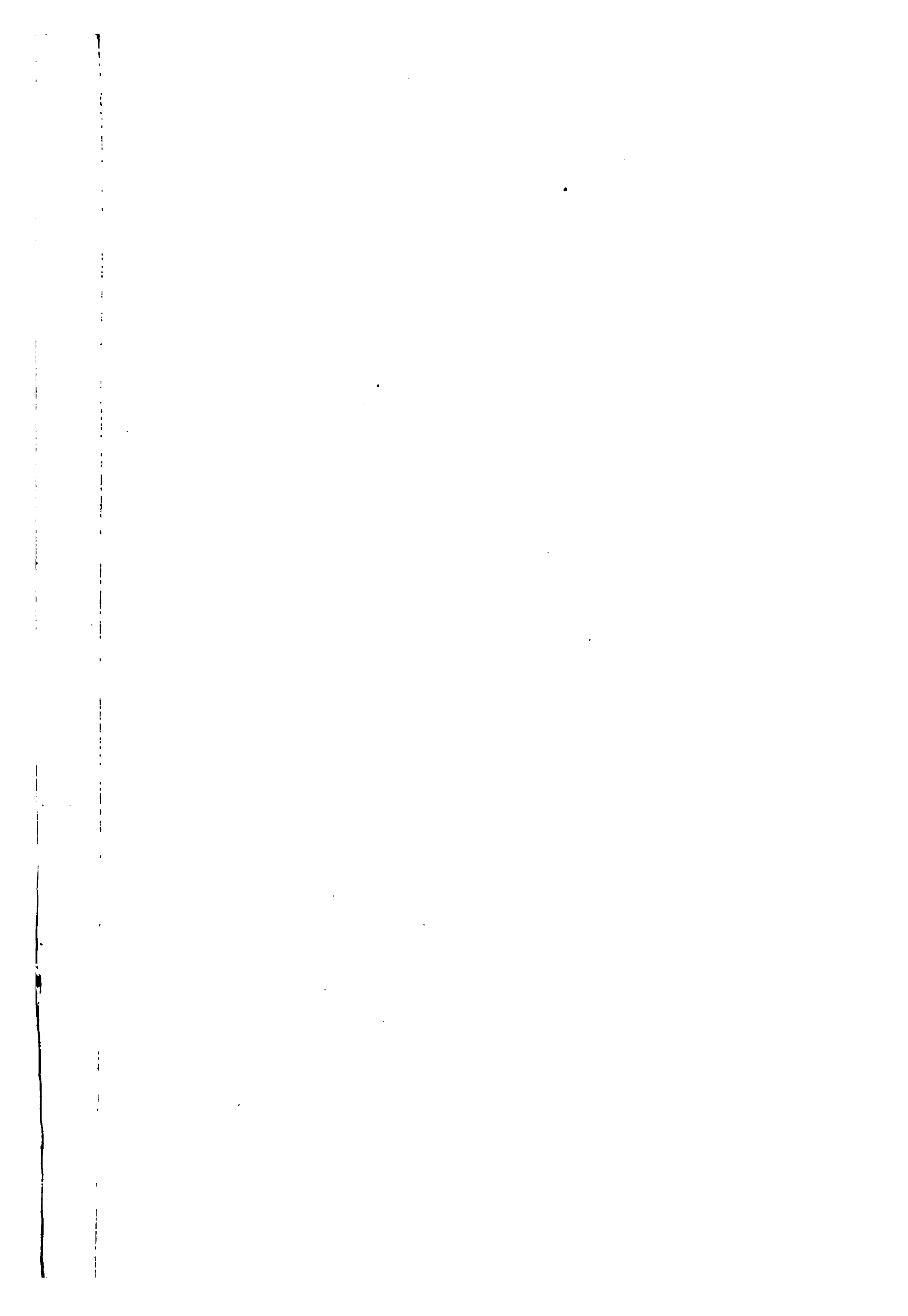
Fig. 66.

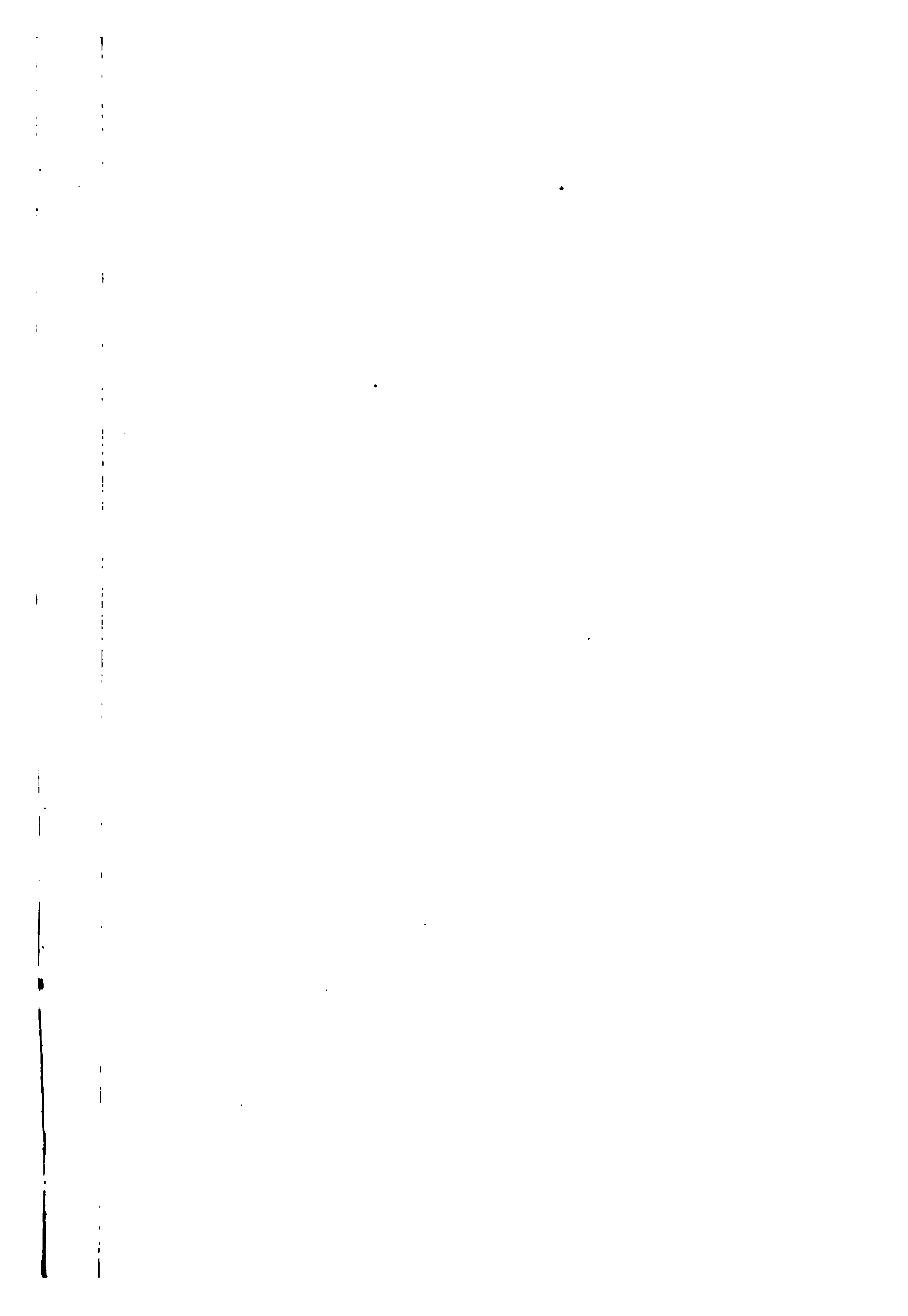


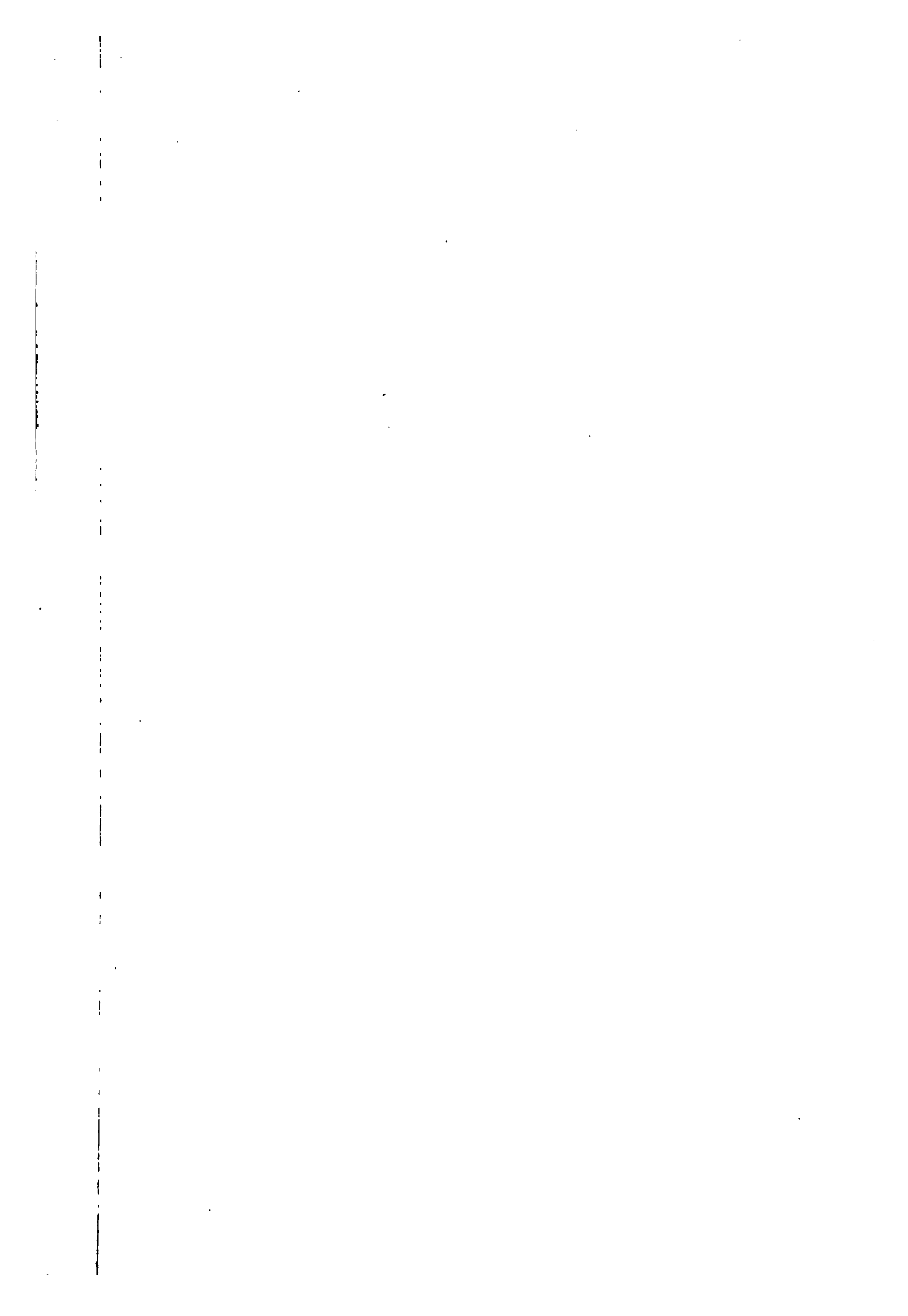
Für den speziellen Fall, wo $\varepsilon = 4$ ist, wird die verticale Halbaxe der Ellipse gleich $\frac{5}{2}c$ und die horizontale gleich σ_e. Für diese Annahme ist ein Viertel von jeder dieser beiden Ellipsen (mehr ist niemals nötig) in der Figur 66 eingezeichnet worden.

Unter der Bedingung, dass der Wert $\frac{\sigma_1}{E} - \frac{\sigma_2}{E\varepsilon}$ in der That die Gefahr eines Bruches angebe, gestatten nun diese Viertelellipsen eine rasche Beantwortung der Frage, ob diese Gefahr an irgend einer Zwischenstelle grösser ist als in den äussersten Kanten. Bleibt die Kurve der τ innerhalb dieser Ellipsen, so wird das Material am ehesten in den äussersten Kanten zerstört; tritt dagegen die Kurve der τ eine Strecke weit über die Ellipsen hinaus, so steht das Material an diesen Stellen der Gefahr einer Zerstörung näher. In diesem Falle wird man sich daher veranlasst sehen, an der gefährlichsten Stelle den Wert $\sigma_{\max} - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \sigma_{\min}$ zu construiren.

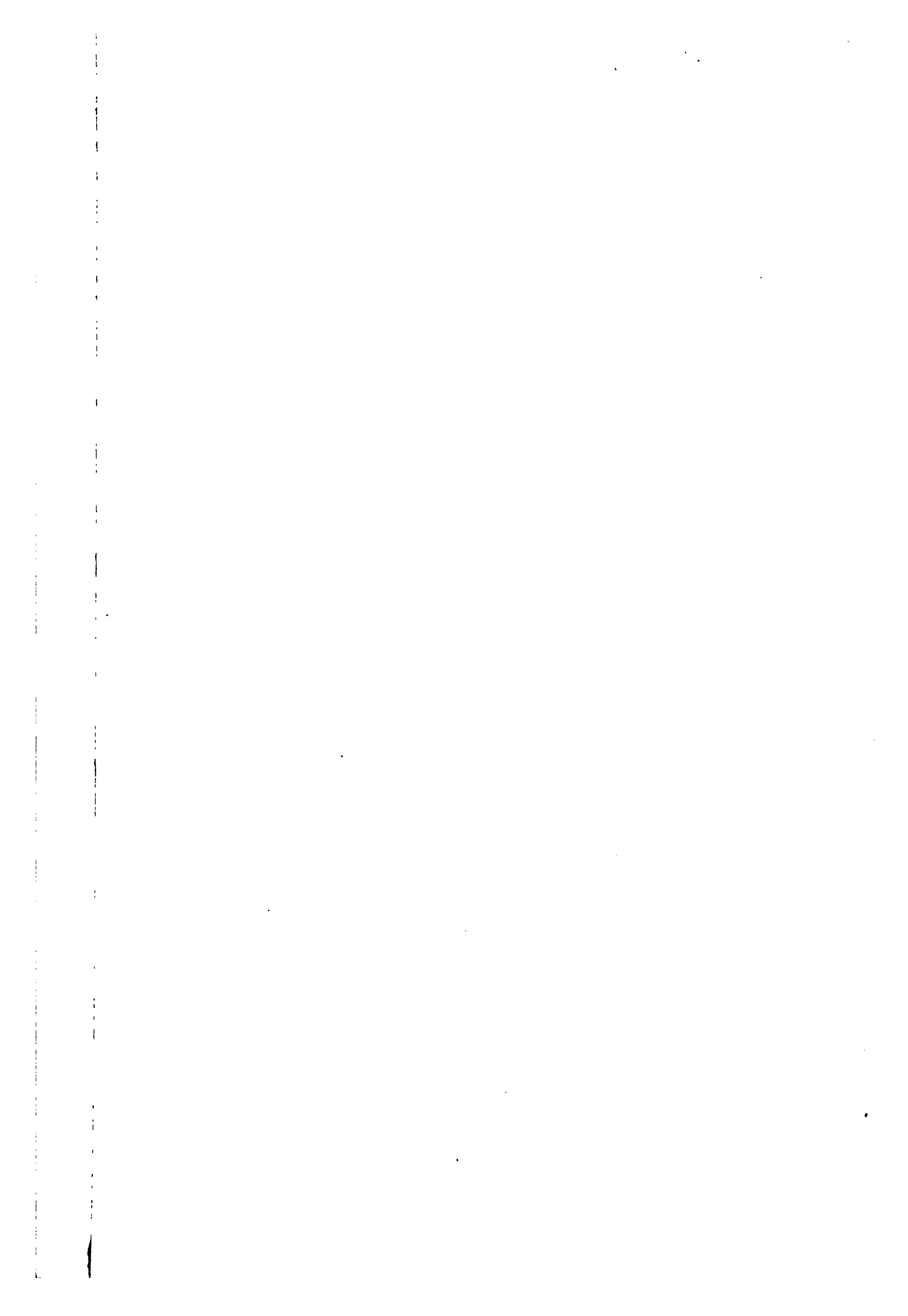
Angesichts der zur Zeit noch hypothetischen Grundlage, auf welcher diese Erwägungen und Schlussfolgerungen beruhen, ist der Wunsch sehr gerechtfertigt, dass die Baumaterialienlehre uns bestimmten Aufschluss darüber liefern möge, wie sich die Zug- und Druckfestigkeit unserer Baustoffe ändert, wenn die Kräfte von verschiedenen Seiten auf sie einwirken.

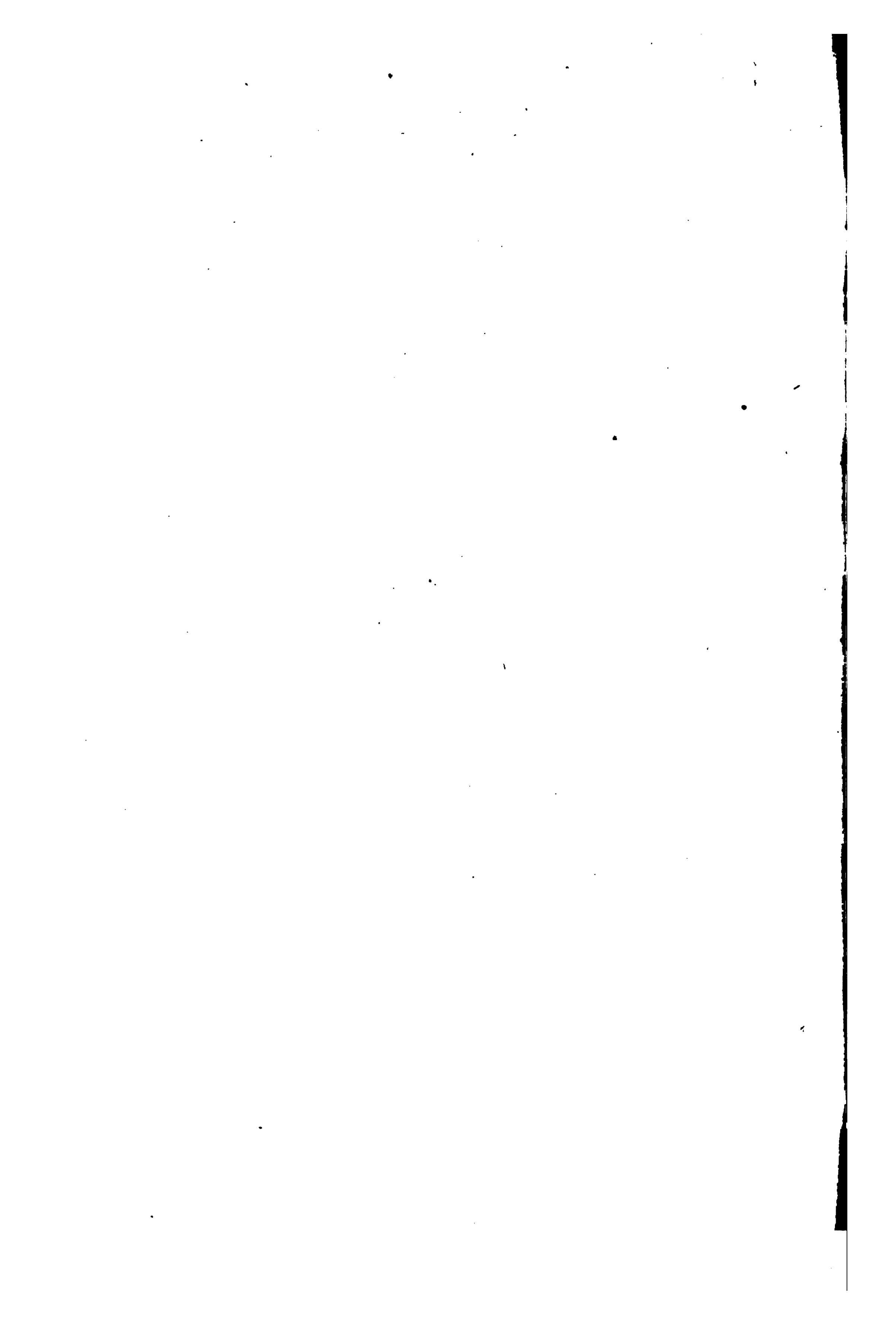




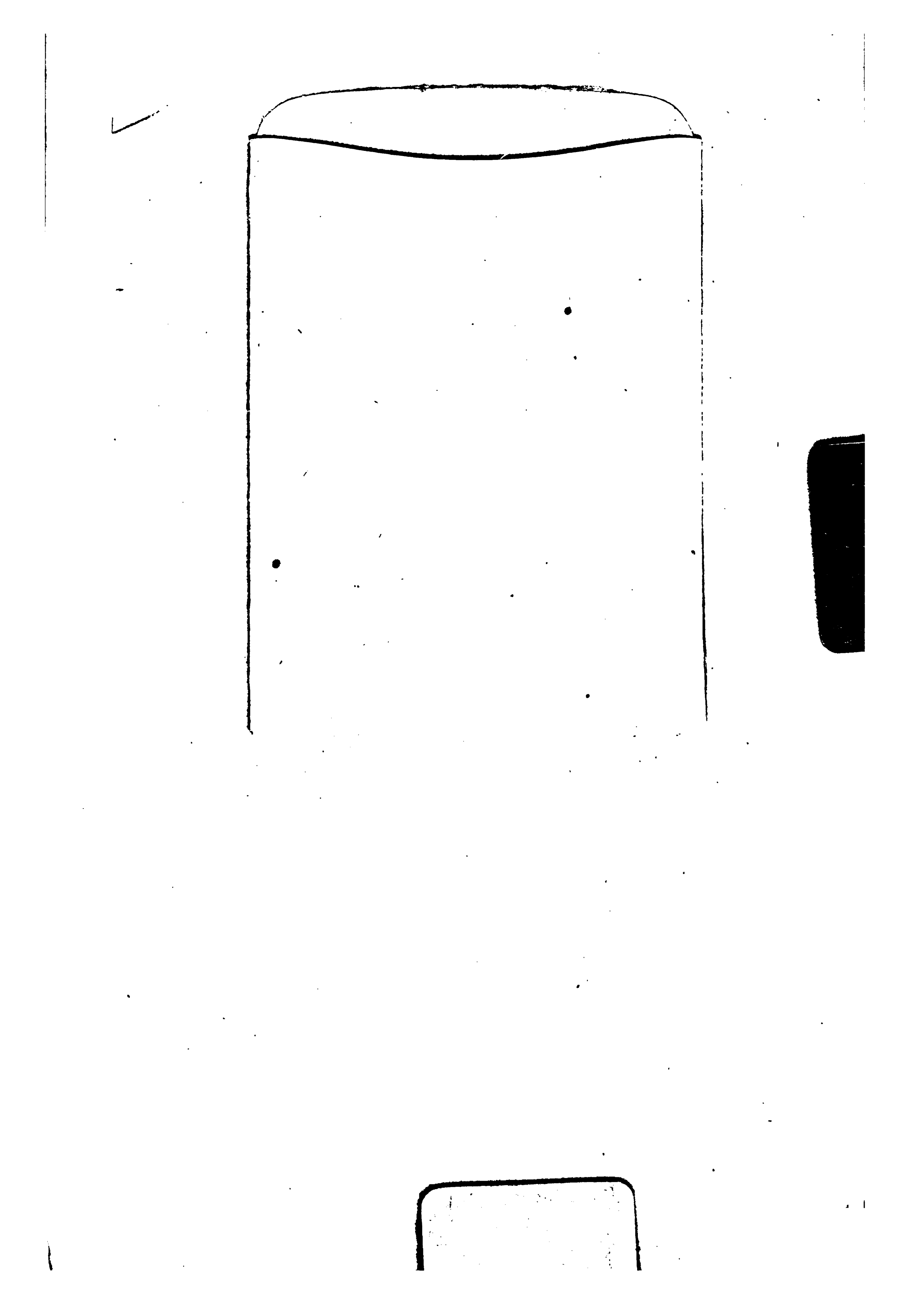


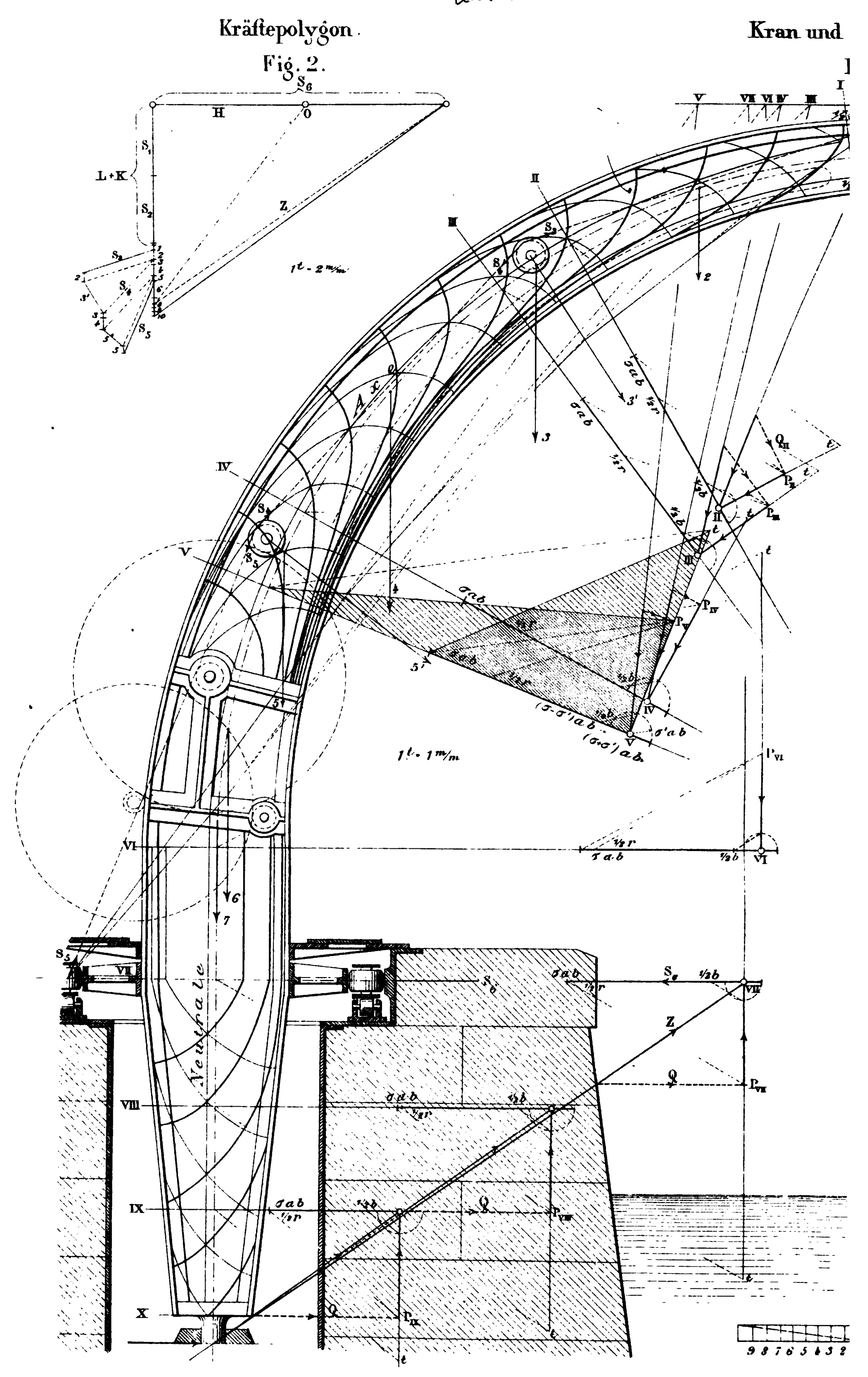








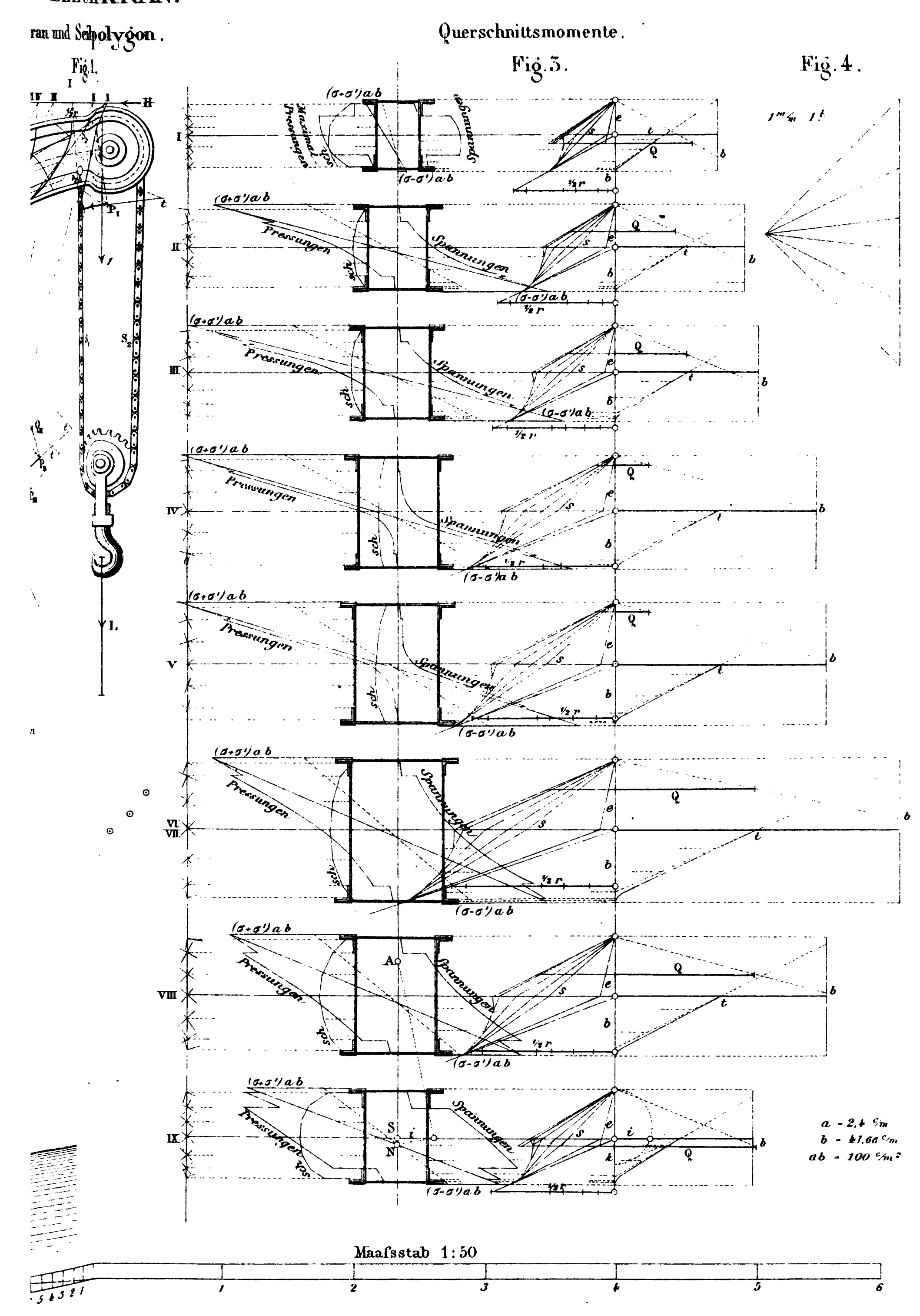




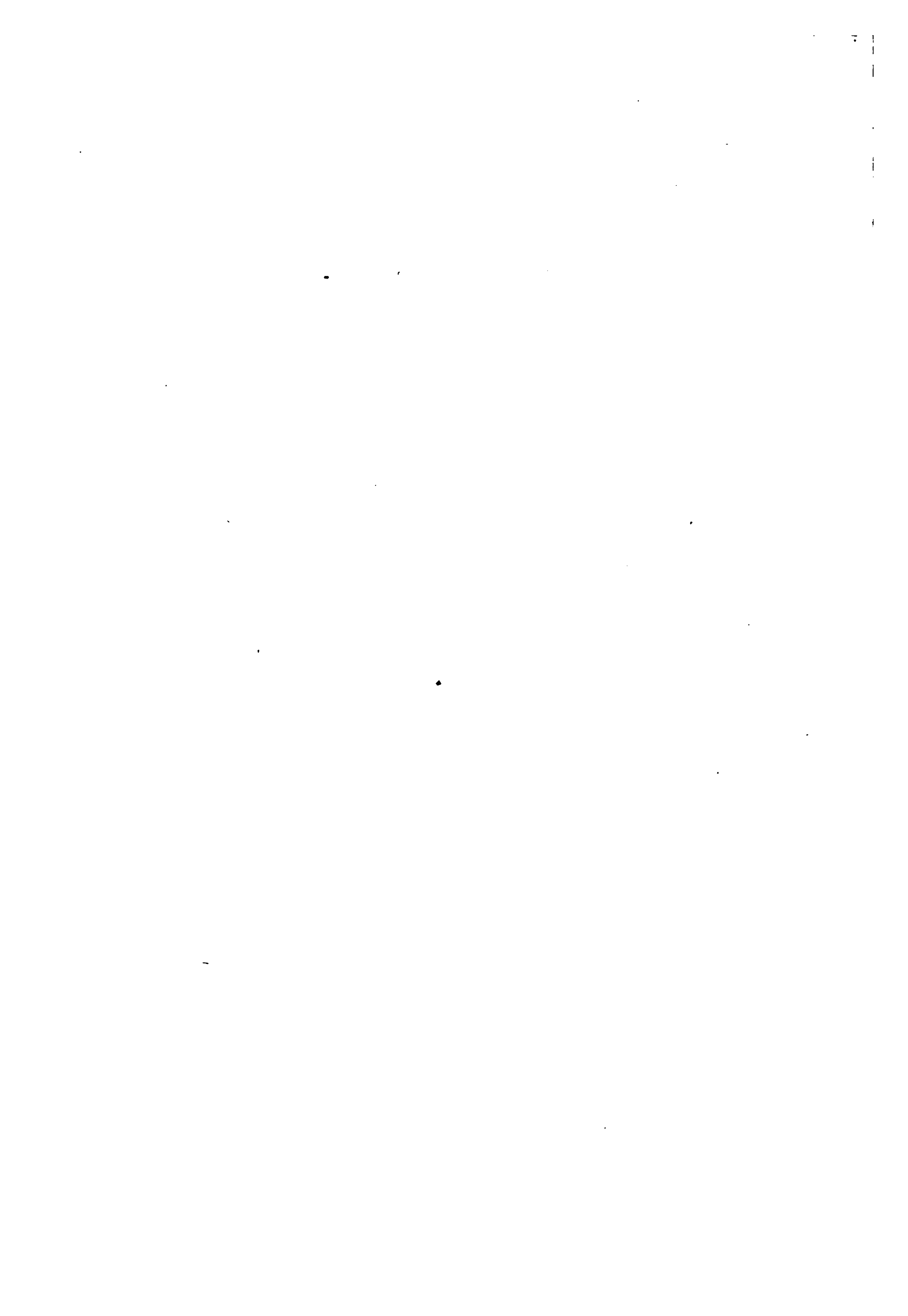
Verlag von Meyer u. Zeller in Zürich.

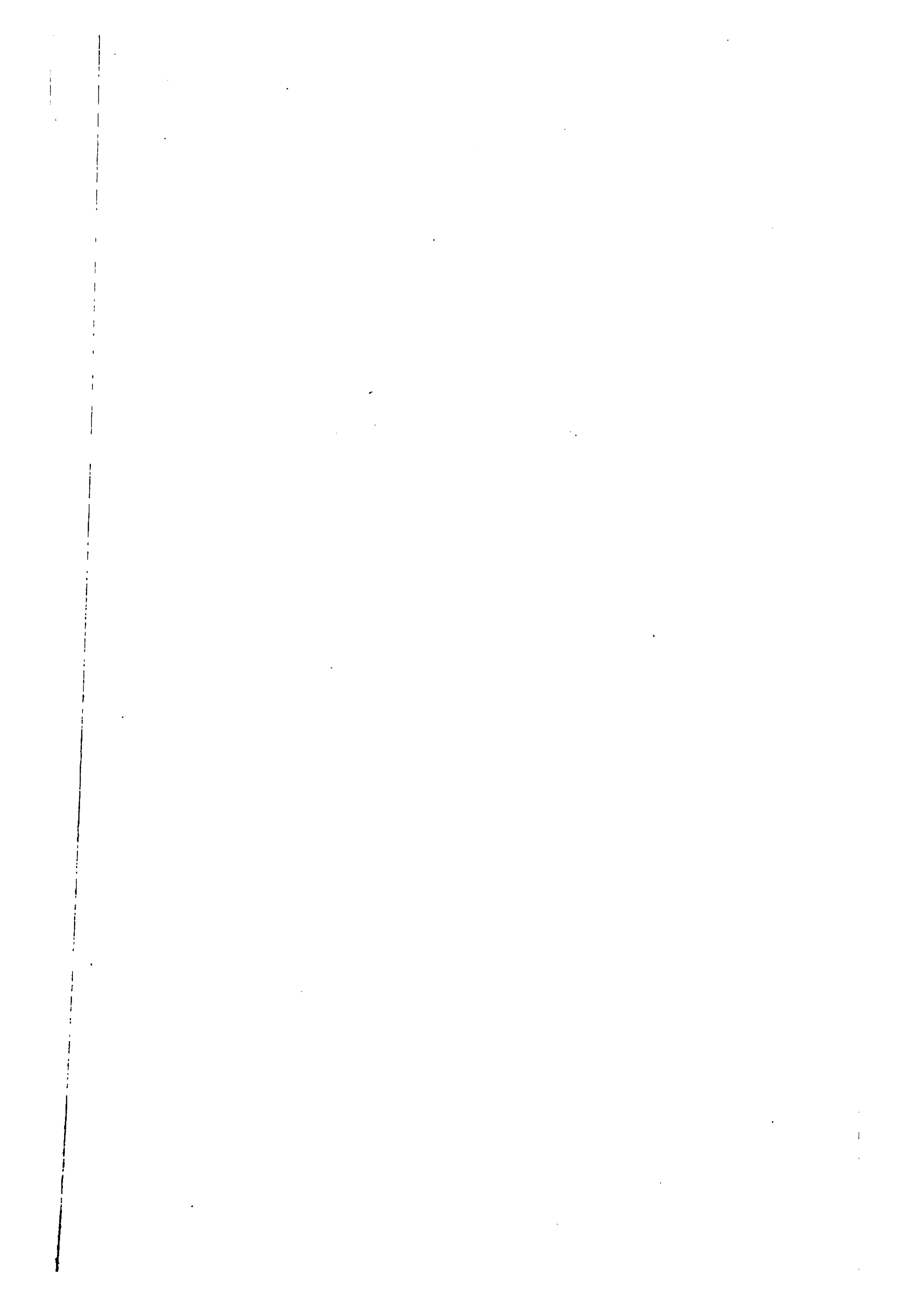
Lithogr. Anstalt von Wu

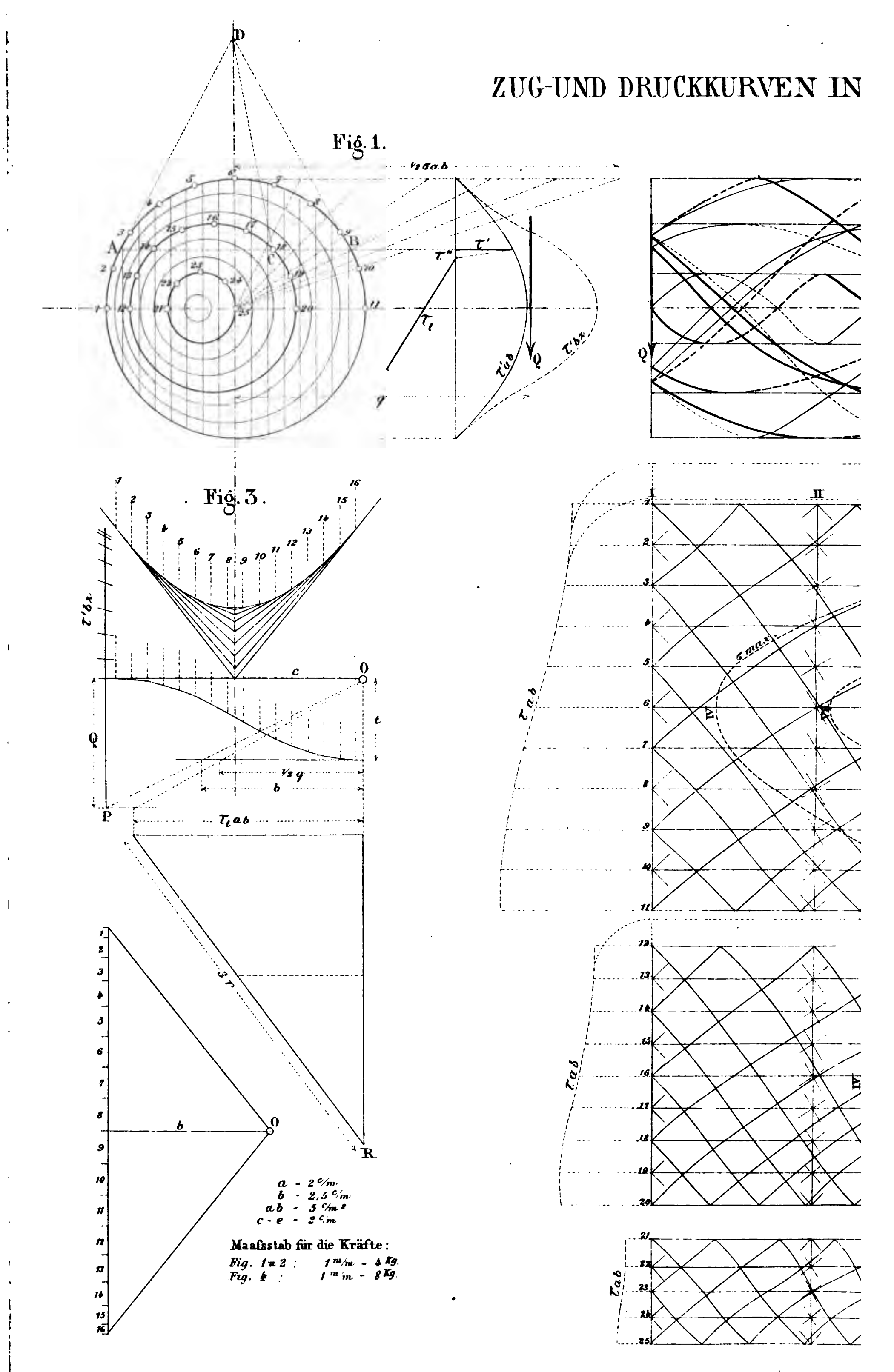
BLECHKRAN.



alt van Wurster, Randegger & Co. in Winterthur.



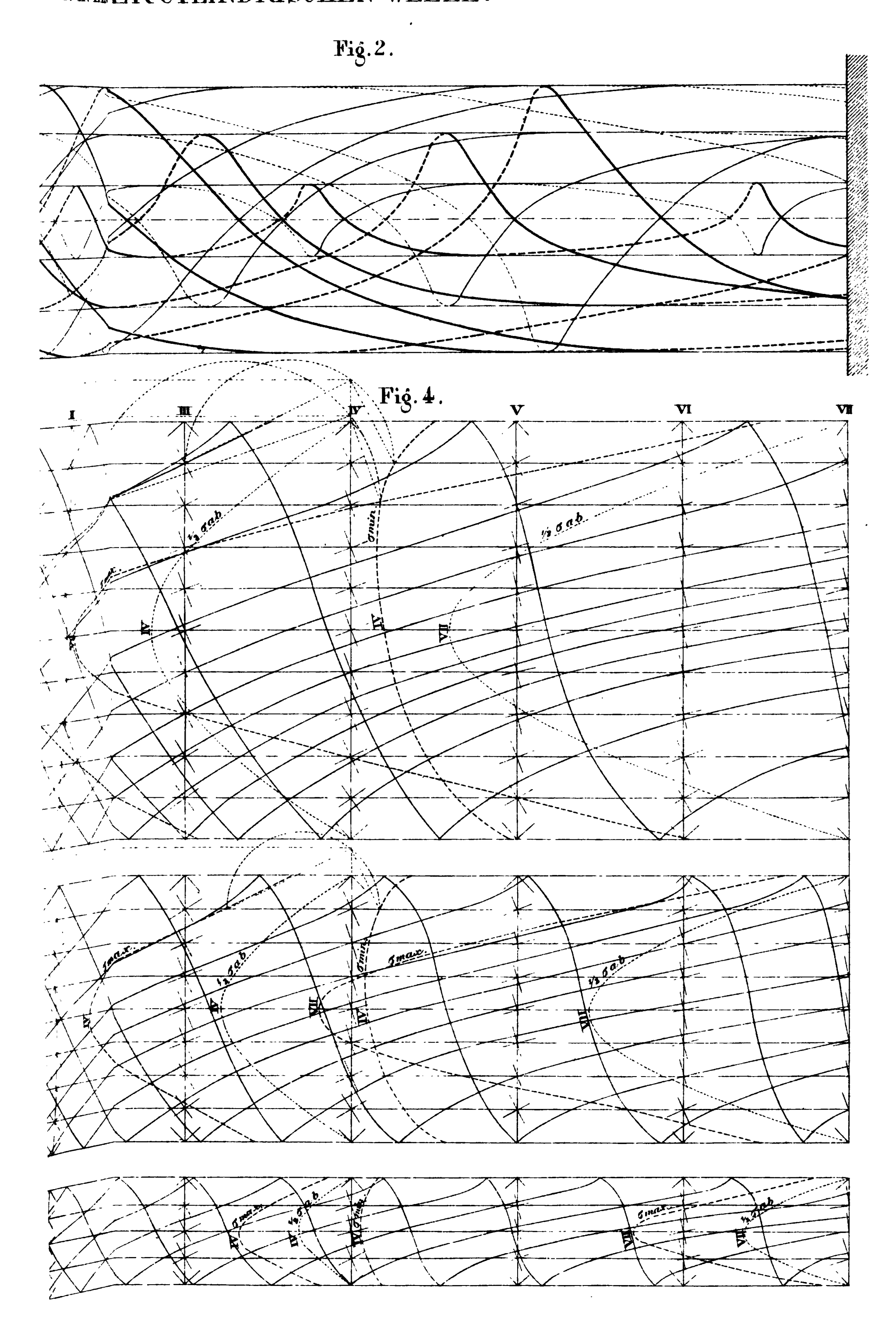




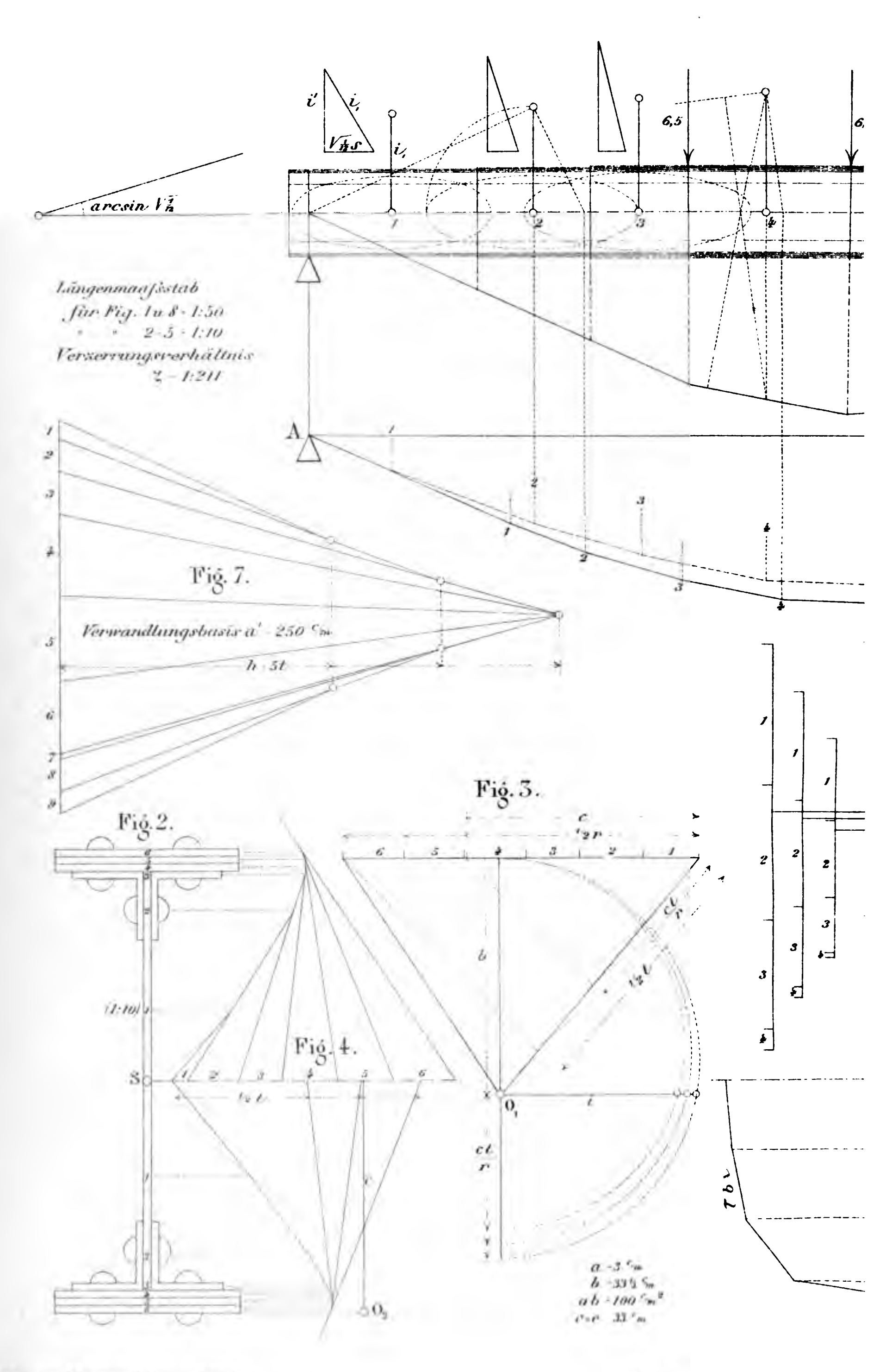
Verlag v. Meyer u. Zeller in Zürich.

Lithogr. Anstalt v. Wurster, R.

…EN IN DER CYLINDRISCHEN WELLE.

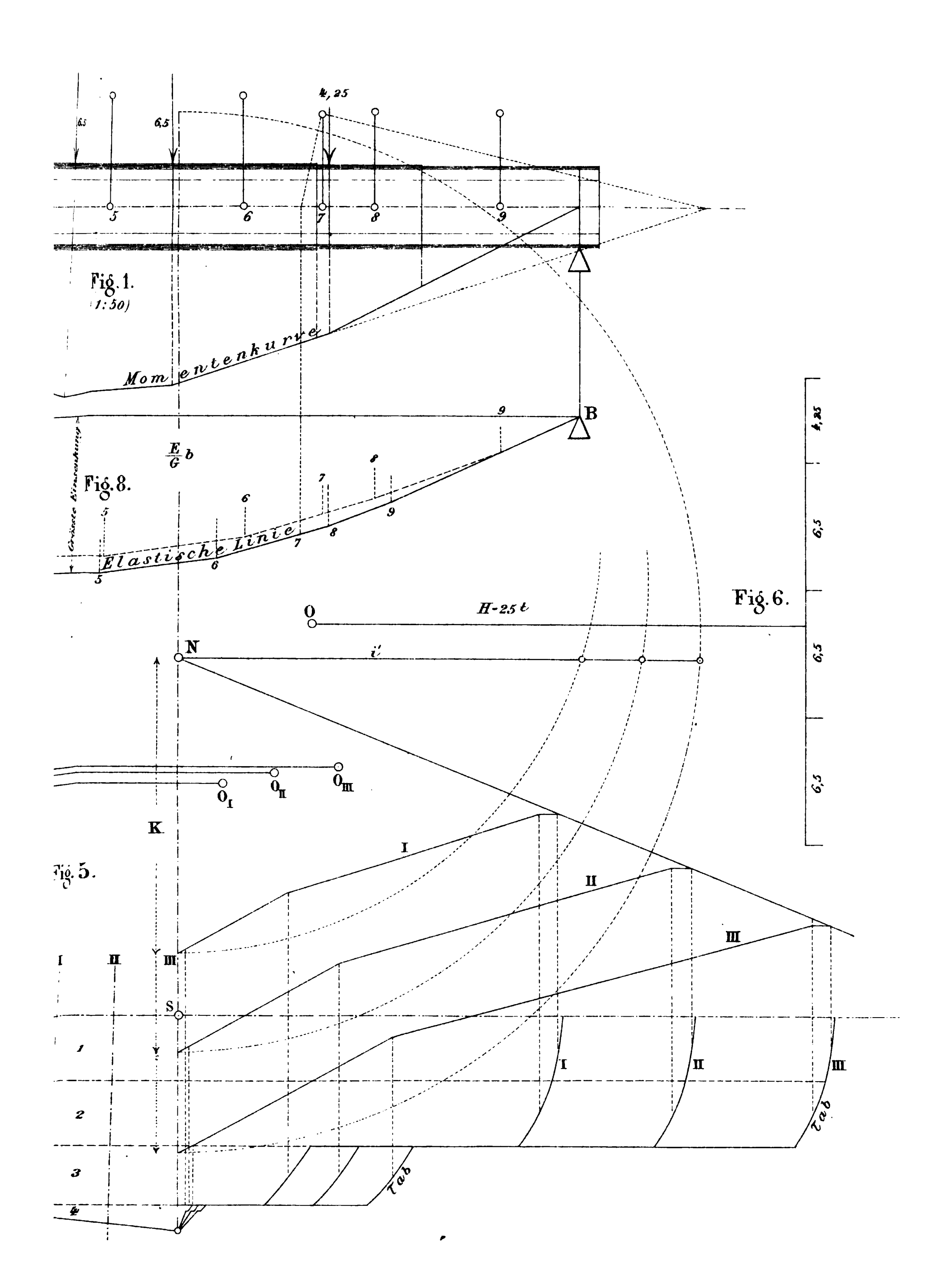


Wurster, Randegger & Co. Winterthur



Verlag von Meyer u. Zeller in Zürich

Lithogr. Anstalt von Wurster, Randegger &


Fig. 1.
(1:50)
Momentenkurve
B
$\frac{E}{G}b$
Fig. 8.
Grösste Einsenkung
Elastische Linie
Fig. 6.
O
H-25 t
N
i'
O_I
O_{II}
O_{III}
K
Fig. 5.
S
Tab



